ALGEBRA

Alvaro Cabrera Javier

Cochabamba, 04 de septiembre de 2014

Índice general

Preface

This is the preface. It is an unnumbered chapter. The `markboth` TeX field at the beginning of this paragraph sets the correct page heading for the Preface portion of the document. The preface does not appear in the table of contents.

Introduction

The introduction is entered using the usual chapter tag. Since the introduction chapter appears before the `mainmatter` TeX field, it is an unnumbered chapter. The primary difference between the preface and the introduction in this shell document is that the introduction will appear in the table of contents and the page headings for the introduction are automatically handled without the need for the `markboth` TeX field. You may use either or both methods to create chapters at the beginning of your document. You may also delete these preliminary chapters.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. GRADO DE UN TÉRMINO

El grado de un término tiene por objeto estudiar las diferentes clases de grados (o exponentes) y las relaciones que se dan entre ellos.

Se puede clasificar en las siguientes partes:

Cuando el término es entero. El grado de un término entero es igual a la suma de los exponentes de la parte literal.

1.1.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular la suma de los coeficientes del siguiente polinomio homogéneo

$$P\left(x,y\right)=3px^{n^2-5}y^{12}+5\left(p-q\right)x^py^q+\left(13q+4\right)x^{n^2}y^{3n-14}$$

   A) 254 B) 843 C) 348 D) 452 E) Ninguno

2. Determine el valor de m para que el grado de:

$$P\left(x\right)=x^{\frac{2m-6}{3}}\left(3x^{11-2m}-4x\right)^4\left(4x^{2m-1}+2x\right)^6\left(x^6-3x^4+41\right)^3$$

   sea 68.

   A) 3 B) -3 C) 4 D) -4 E) Ninguno

3. Dado el polinomio: $P\left(x,y\right)=x^{2a}y^{b+2}-3x^ay^{b+1}+x^ay^b$ es igual a la mitad de la suma de los exponentes de todas las variables. Calcular el grado relativo de y.

   A) 6 B) 8 C) 9 D) 3 E) Ninguno

Capítulo 2

OPERACIONES ELEMENTALES

2.1. SUMA DE POLINOMIOS

La *suma o adición* es una operación que tiene por objeto reunir dos o más términos semejantes (sumandos) en un solo término (suma). Se denomina términos semejantes a aquellos que tienen la misma parte literal afectada por los mismos exponentes.

2.1.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

Sumar:

1. $3a + 2b - c$; $2a + 3b + c$. Sol. $5a + 5b$
2. $9x - 3y + 5z$; $-x + 5y + 4z$; $-8x + 4y - 6z$. Sol. $x + 2y + 3z$
3. $p + q + r$; $-2p - 6q + 3r$; $p + 5q - 8r$. Sol. $6q - 4r$
4. $5x - 7y + 8$; $-y + 6x - 4$; $-4 - 3x + 8y$. Sol. $8x - 9y$
5. $5ab - 3bc + 3cd$; $2bc - 3cd - 3de$; $bc - 5ab + 3de$. Sol. 0.
6. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy$; $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$. Sol. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}xy + \frac{1}{4}y^2$
7. $x^4 + x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 3$; $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{8}x - 3$; $-\frac{3}{5}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{8}x$. Sol. $\frac{2}{5}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{5}x^2$
8. $a^2 + \frac{1}{2}ab$; $-\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2$; $\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2$. Sol. $\frac{7}{4}a^2 + \frac{3}{10}b^2$
9. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $-\frac{2}{5}xy + \frac{1}{4}y^2$; $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{10}xy + \frac{1}{3}y^2$. Sol. $\frac{17}{12}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{12}y^2$

10. x^4+y^4; $\frac{5}{4}x^4+\frac{3}{8}x^2y^2-\frac{1}{14}y^4$; $-\frac{5}{8}x^4-\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{7}y^4$. Sol. $\frac{13}{8}x^4+\frac{1}{8}x^2y^2+\frac{15}{14}y^4$
11. $3x^n+4x^{n-1}-5$; $7x^n-2x^{n-1}-4$ Sol. $10x^n+2x^{n-1}-9$
12. $5x^{m+2}-8x^{n-2}$; $8x^{n-2}-5x^{m+2}$. Sol. 0
13. $3x^{n-1}+8x^{n-2}-9x^{n-3}$; $\frac{1}{3}x^{n-2}-\frac{1}{4}x^{n-1}+\frac{1}{7}x^{n-3}$. Sol.
14. $\frac{2}{5}x^{a-b}+\frac{4}{5}x^{b-c}-\frac{5}{7}x^{c-d}$; $\frac{3}{4}x^{c-d}-\frac{4}{3}x^{b-c}+\frac{8}{9}x^{a-b}$. Sol.
15. $(a+b)+(-3a-5b+3a)+(2a+5b-c)$. Sol.
16. $2x+[-5x-(2y+\{-x+y\})]$. Sol.
17. $-(a+b)+[-3a+b-\{-2a+b-(a-b)\}+2a]$. Sol.
18. $-(3m+n)-[2m+\{-m+(2m-2n+5)\}-(n+6)]$. Sol.
19. $-\{-[-(a+b)]\}-\{[-(-b-a)]\}-a+b$. Sol.
20. $-[-a+\{-a+(a-b)-(a-b+c)-(a+b)\}]$. Sol.

2.2. RESTA

La *resta o sustracción* es una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (minuendo) y uno de ellos (sustraendo), hallar el otro sumando (resta o diferencia).

Es evidente, de esta definición, que la suma del sustraendo y la diferencia tiene que ser el minuendo.

Si de a (minuendo) queremos restar b (sustraendo), la diferencia será $a-b$. En efecto: $a-b$ será la diferencia si sumada con el sustraendo b reproduce el minuendo a, y en efecto: $a-b+b=a$.

2.2.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De: $a+b$ restar $a-b$.
2. De $a+b+c-d$ restar $-a-b+c-d$.
3. De x^2+y^2-3xy restar $-y^2+3x^2-4xy$.
4. Restar: m^2-n^2-3mn de $-5m^2-n^2+6mn$.
5. Restar: $x^5-x^2y^2-6xy^4+25y^5$ de $-3xy^4-8x^3y^2-19y^5+18$.
6. De: $\frac{5}{4}m^3+\frac{2}{9}n^3$ restar $-\frac{1}{2}m^2n+\frac{3}{8}mn^2-\frac{1}{5}m^3$.
7. De a^2 restar la suma de $ab+b^2$ con a^2-5b^2.

8. De $x^2 - 5ax + 3a^2$ restar la suma de $9ax - a^2$ con $25x^2 - 9ax + 7a^2$.
9. De la suma de $a^2 + 1$ con $a^3 - 1$ restar la suma de $a^4 + 2$ con $a - 2$.
10. De la suma de $\frac{1}{2}a - \frac{2}{9}b$ con $\frac{1}{2}b - \frac{3}{5}c$ restar la suma de $\frac{2}{3}b + \frac{1}{5}c$ con $-\frac{1}{10}c - \frac{5}{9}b$.
11. Hallar la expresión que sumada con $x^3 - x^2 + 5$ da $3x - 6$.
12. ¿Qué expresión hay que suma con $-7xy + 5x^2 - 8y^2$ para que la suma sea 1?
13. Simplificar: $2x + [-5x - (-2y + \{-x - y\})]$.
14. Simplificar: $(-x + y) - \{4x + 2y + [-x - y - \overline{x + y}]\}$.
15. $-\{-[-(a + b)]\} - \{+[-(-b - a)]\} - \overline{a + b}$.

2.3. MULTIPLICACION

La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto, que sea respecto del multiplicando, en valor absoluto y signo, lo que el multiplicador es respecto de la unidad positiva.

El multiplicando y multiplicador son llamados factores del producto.

El orden de los factores no altera el producto.

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

2.3.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Multiplicar: $(a)(-3a)(a^2)$.
2. Multiplicar: $\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(-\frac{2}{3}a^2x\right)\left(-\frac{3}{5}a^4m\right)$.
3. Multiplicar: $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$.
4. Multiplicar: $a^m - a^{m-1} + a^{m-2}$ por $-2a$.
5. Multiplicar: $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$.
6. Multiplicar: $3a - 5b + 6c$ por $-\frac{3}{10}a^2x^3$.
7. Multiplicar: $x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ por $-y^2 - xy - x^2$.
8. Multiplicar: $a + b - c$ por $a - b + c$.
9. Multiplicar: $a^x - a^{x+1} + a^{x+2}$ por $a + 1$.
10. Multiplicar: $a^x + b^x$ por $a^n + b^n$.

11. Simplificar: $x - [3a + 2(-x + 1)]$.

12. Simplificar: $-[3x - 2y + (x - 2y) - 2(x + y) - 3(2x + 1)]$.

13. Simplificar: $4(x + 3) + 5(x + 2)$.

14. Simplificar: $(a + c)^2 - (a - c)^2$.

15. Simplificar: $3(x + y)^2 - 4(x - y)^2 + 3x^2 - 3y^2$.

16. Calcular n si el término independiente del polinomio es 40320

$$P(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) \ldots (x + n - 1)$$

A) 5 B) 8 B) 9 C) 11 E) Ninguno

17. Cuando se desarrolla el producto

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$$

el coeficiente del término en x^6, vale:

A) -22 B) -30 C) -26 D) -28 E) Ninguno

2.4. DIVISION

La *división* es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).

De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Así, la operación de dividir $6a^2$ entre $3a$, que se indica $6a^2 \div 3a$ ó $\dfrac{6a^2}{3a}$, consiste en hallar una cantidad que multiplicada por $3a$ dé $6a^2$. Esa cantidad (cociente) es $2a$.

2.4.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dividir: $\frac{1}{2}x^2$ entre $\frac{2}{3}$.

2. Dividir: $\frac{3}{4}a^m b^n$ entre $-\frac{3}{2}b^2$.

3. Dividir: $a^2 - ab$ entre a.

4. Dividir: $3x^2y^3 - 5a^2x^4$ entre $-3x^2$.

5. Dividir: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ entre $\frac{2}{3}x$.

6. Dividir: $\dfrac{1}{4}m^4 - \dfrac{2}{3}m^3n + \dfrac{2}{5}m^2n^2$ entre $\dfrac{1}{4}m^2$.

7. Dividir: $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$.

8. Dividir: $m^6 - n^6$ entre $m^2 - n^2$.

9. Dividir: $a^4 - a^2 - 2a - 1$ entre $a^2 + a + 1$.

10. Dividir: $a^{m+x} + a^m b^x + a^x b^m + b^{m+x}$ entre $a^x + b^x$.

11. Si el resto de la siguiente división

$$E = \frac{6x^4 - 11x^2 + ax + b}{3x^2 - 3x - 1}$$

es igual a $3x + 2$. Determinar el valor de la constante a.

A) 3 B) 4 C) -3 D) -4 E) Ninguno

Solución. Efectuando la división entre polinomios:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & & -11x^2 & +ax & +b & 3x^2 - 3x - 1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +6x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-3}
 & +6x^3 & -9x^2 & & & \\
 & -6x^3 & +6x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & (a+2)\,x & & \\
 & & +3x^2 & -3x & -1 & \\ \cline{3-5}
 & & & (a-1)\,x & (b-1) &
\end{array}$$

el resto de esta división es $(a-1)\,x + (b-1)$, según el problema el resto es $3x + 2$, igualando los coeficientes de x, $a - 1 = 3$, entonces

$$a = 4$$

12. Determinar el valor de a de tal manera que el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ sea divisible por $\left(4 - 2x + x^2\right)$.

A) -8 B) -42 C) -24 D) 8 E) Ninguno

Solución. Dividiendo los polinomios:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & & +ax & +b & x^2 - 2x + 4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -4x^2 & & & x^2 - x - 6 \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & -4x^2 & & & \\
 & +x^3 & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & -6x^2 & +(a+4)\,x & & \\
 & & +6x^2 & -12x & +24 & \\ \cline{3-5}
 & & & (a-8)\,x & +(b+24) &
\end{array}$$

del resto de esta división los coeficientes igualamos a cero: $a - 8 = 0$, donde $a = 8$ y $b = -24$.

13. Si la siguiente división es exacta

$$\frac{8x^4 + 4x^3 + ax - 14}{2x^2 - 3x - b}$$

la suma de los valores de a y b es:

A) 8 B) 12 C) 13 D) 15 E) Ninguno

Solución. Realizando la división

$$\begin{array}{lllll|l}
+8x^4 & +4x^3 & & +ax & -14 & 2x^2 - 3x - b \\ \cline{6-6}
-8x^4 & +12x^3 & +4bx^2 & & & 4x^2 + 8x + (2b+12) \\ \cline{1-3}
 & +16x^3 & +4bx^2 & & & \\
 & -16x^3 & +24x^2 & +8bx & & \\ \cline{2-4}
 & & +(4b+24)x^2 & (a+8b)x & & \\
 & & -(4b+24)x^2 & (6b+36)x & 2b^2+12b & \\ \cline{3-5}
 & & & (a+14b+36)x & 2b^2+12b-14 &
\end{array}$$

donde

$$\begin{cases} a + 14b + 36 = 0 \\ b^2 + 6b - 7 = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema, las soluciones son:: $[a_1 = -50, b_1 = 1]$, $[a_2 = 62, b_2 = -7]$

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 &= -49 \\ a_2 + b_2 &= 55 \end{aligned}$$

14. Si dividimos el polinomio $x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 1$, por el polinomio $x^2 + x + 1$ quedando como residuo $(x - 2)$, el cociente resulta:

A) $x^2 - 3x + 1$ B) $x^2 + 3x - 1$ C) $x^2 - 2x - 1$ D) $x^2 - 3$ E) Ninguno

Solución. Realizando la división

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & -1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-3}
 & -3x^3 & -2x^2 & & & \\
 & +3x^3 & +3x^2 & +3x & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & 2x & & \\
 & & -x^2 & -x & -1 & \\ \cline{3-5}
 & & & x & -2 &
\end{array}$$

donde el cociente: $x^2 - 3x + 1$.

15. Determinar el valor de q, si la división de los siguientes polinomios es exacta

$$\frac{x^4 + px^2 + q}{x^2 - 6x + 5}$$

A) 25 B) -26 C) -1 D) 1 E) Ninguno.

Solución. La división podemos expresarla de la siguiente manera

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & & +px^2 & & q & x^2-6x+5 \\ \cline{6-6}
-x^2 & +6x^3 & -5x^2 & & & x^2+6x+(p+31) \\ \cline{1-3}
 & 6x^3 & (p-5)\,x^2 & & & \\
 & -6x^3 & +36x^2 & -30x & & \\ \cline{2-5}
 & & (p+31)\,x^2 & -30x & & \\
 & & -\,(p+31)\,x^2 & +6\,(p+31)\,x & -5\,(p-31) & \\ \cline{3-5}
 & & & +6\,(p+26)\,x & q-5\,(p-31) &
\end{array}$$

de donde

$$\begin{aligned}
6\,(p+26) &= 0 \\
q-5\,(p-31) &= 0
\end{aligned}$$

de donde $p=-26$, reemplazando en la segunda ecuación

$$\begin{aligned}
q &= 5\,(-26-31) \\
q &= -285
\end{aligned}$$

16. Si la siguiente división

$$\frac{12x^5-9x^4+14x^3-mx^2+nx-p}{3x^3+2x-6}$$

es exacta; entonces hallar la suma de $m+n+p$:

A) 44 B) 54 C) 64 D) 74 E) Ninguno

Solución. Realizando la división:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
12x^5 & -9x^4 & +14x^3 & -mx^2 & +nx & -p & 3x^3+2x-6 \\ \cline{7-7}
-12x^5 & & -8x^3 & +24x^2 & & & 4x^2-3x+2 \\ \cline{1-4}
 & -9x^4 & +6x^3 & (24-m)\,x^2 & & & \\
 & +9x^4 & & +6x^2 & -18x & & \\ \cline{2-5}
 & & +6x^3 & (30-m)\,x^2 & (n-18)\,x & & \\
 & & -6x^3 & & -4x & +12 & \\ \cline{3-6}
 & & & (30-m)\,x^2 & (n-22)\,x & (12-p) &
\end{array}$$

si la división es exacta, entonces los coeficientes del resto se igualan a cero, esto es: $30-m=0 \Rightarrow m=30$; $n-22=0 \Rightarrow n=22$ y$12-p=0 \Rightarrow p=12$. Finalmente la suma de:

$$m+n+p=64$$

17. Sea el polinomio $P(x)=x^2+x+1$. Al dividir el polinomio $Q(x)=\left(x^2+x+1\right)P(x)$ por $R(x)=x^2+x-1$, se obtiene como residuo:

A) 25 B) 16 C) 9 D) 4 E) Ninguno.

Solución. Multiplicando:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left(x^2+x+1\right)P(x) \\ &= \left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+1\right) \\ &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \end{aligned}$$

ahora realicemos la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +2x^3 & +3x^2 & +2x & +1 & x^2+x-1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -x^3 & +x^2 & & & x^2+x+3 \\ \cline{1-3} & x^3 & +4x^2 & & & \\ & -x^3 & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4} & & 3x^2 & +3x & & \\ & & -3x^2 & -3x & 3 & \\ \cline{3-5} & & & & (4) & \end{array}$$

el residuo es: $R=4$

18. Al dividir el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ por $(x-1)$ se obtiene un residuo igual a 2. Al dividir el mismo polinomio por x^2+5x+6 se obtiene como residuo $(-11x+13)$. Hallar a^2+b^2

    A) 65 B) 116 C) 149 D) 120 E) Ninguno

    Solución. Dividiendo:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +ax^2 & +bx & +c & x-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & +x^2 & & & x^2+(a+1)x+(a+b+1) \\ \cline{1-2} & (a+1)x^2 & & & \\ & -(a+1)x^2 & +(a+1)x & & \\ \cline{2-3} & & (a+b+1)x & & \\ & & -(a+b+1)x & +(a+b+1) & \\ \cline{3-4} & & & a+b+c+1 & \end{array}$$

La segunda división:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +ax^2 & +bx & +c & x^2+5x+6 \\ \cline{5-5} -x^3 & -5x^2 & -6x & & x+(a-5) \\ \cline{1-3} & (a-5)x^2 & (b-6)x & & \\ & \vert\ -(a-5)x^2\ \vert & -5(a-5)x\ \vert & -6(a-5) & \\ & & (-5a+b+19)x & -6a+c+30 & \end{array}$$

de la primera división el residuo es igual a 2, de la segunda división igualando coeficientes, tenemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a+b+c+1=2 \\ -5a+b+19=-11 \\ -6a+c+30=13 \end{cases}$$

la solución del sistema es: $[a=4, b=-10, c=7]$, donde:

$$a^2+b^2=116$$

Capítulo 3

PRODUCTOS NOTABLES

Son aquellos cuyo desarrollo se reconoce fácilmente, los principales son:

1. **Cuadrado de una suma y de una diferencia**.

   a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

2. **Producto de una suma por su diferencia.** (Diferencia de cuadrados)

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

3. **Cuadrado de un trinomio**

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

4. **Cubo de una suma o de una diferencia**

   a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

5. **Producto de dos binomios que tienen un término común**

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

6. **Producto de un binomio y un trinomio que da una suma o diferencia de cubos**

   a) $(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$

   b) $(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$

$$(a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right) = a^3 \pm b^3$$

3.0.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Desarrollar las siguientes suma de cuadrados:

   a) $(2a+3b)^2$

   b) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y\right)^2$

2. Determinar el valor de a si se sabe que el polinomio:

$$x^2+ax+36$$

   es un trinomio cuadrado perfecto.

   Solución. Sea el trinomio cuadrado perfecto: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, comparando el polinomio con la expresión trinómica:

$$x^2+ax+36=x^2+2x\left(\frac{a}{2}\right)+6^2$$

   de donde $\frac{a}{2}=6\Rightarrow a=12$. El trinomio cuadrado perfecto es: $x^2+12x+36$

3. Determinar el valor de a si se sabe que la siguiente expresión:

$$x^2+6ax+64$$

   es un trinomio cuadrado perfecto.

   Solución. Si el trinomio cuadrado perfecto es de la forma: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, entonces:

$$x^2+2\,(x)\,(3a)+(8)^2$$

   donde:

$$3a=8\Rightarrow a=\frac{8}{3}$$

   el trinomio cuadrado perfecto es: $x^2+16x+64$

4. Determinar el valor de a si se sabe que la siguiente expresión:

$$ax^2+8\sqrt{a+9}x+25$$

   sea un trinomio cuadrado perfecto.

   Solución. Completando a la forma: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$:

$$\left(\sqrt{a}x\right)^2+2\left(\sqrt{a}x\right)\left(\frac{4\sqrt{a+9}}{\sqrt{a}}\right)+(5)^2$$

   donde:

$$\begin{aligned}\frac{4\sqrt{a+9}}{\sqrt{a}}&=5\\4\sqrt{a+9}&=5\sqrt{a}\end{aligned}$$

elevando al cuadrado

$$16a + 144 = 25a$$

simplificando

$$a = 16$$

el trinomio cuadrado perfecto es: $16a^2 + 40x + 25$.

5. Calcular el valor de:

$$\begin{aligned} R &= (a+b+c)(a+b-c) + \\ &\quad + (a+b-c)(a-b+c) + \\ &\quad + (a-b+c)(b+c-a) + \\ &\quad + (b-c+a)(b-c-a) - 4ab \end{aligned}$$

Solución. Aplicando diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} R &= \left[(a+b)^2 - c^2\right] + \left[a^2 - (b-c)^2\right] + \left[c^2 - (a-b)^2\right] + \left[(b-c)^2 - a^2\right] - 4ab \\ &= (a+b)^2 - c^2 + a^2 - (b-c)^2 + c^2 - (a-b)^2 + (b-c)^2 - a^2 - 4ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2bc - c^2 - a^2 + 2ab - b^2 + b^2 - 2bc + c^2 - 4ab \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Efectuar:

$$L = \frac{(x+a+b+c)(c+a+b+d) - cd}{x+a+b+c+d} - \frac{(x+a+b)(x+a+c) - bc}{x+a+b+c}$$

Solución.

7. Indicar el número de factores racionales que se obtiene al factorizar $x^{32} - 1$.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3 E) Ninguno

Solución. Descomponiendo en factores:

$$\begin{aligned} x^{32} - 1 &= \left(x^{16}\right)^2 - 1 \\ &= \left(x^{16}+1\right)\left(x^{16}-1\right) \\ &= \left(x^{16}+1\right)\left(x^{8}+1\right)\left(x^{8}-1\right) \\ &= \left(x^{16}+1\right)\left(x^{8}+^{o}\right)\left(x^{4}+1\right)\left(x^{4}-1\right) \\ &= \left(x^{16}+1\right)\left(x^{8}+^{o}\right)\left(x^{4}+1\right)\left(x^{2}+1\right)\left(x^{2}-1\right) \\ &= \left(x^{16}+1\right)\left(x^{8}+^{o}\right)\left(x^{4}+1\right)\left(x^{2}+1\right)(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)^4 (x-1)\left(x^{15} - x^{14} + ...\right)\left(x^7 - x^6 ...\right)\left(x^3 - x^2 ..\right)\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

como vemos los factores racionales son: $(x+1)^4 (x-1)$, existen 5 factores racionales.

Capítulo 4

COCIENTES NOTABLES

1. Si el siguiente cociente notable $\dfrac{x^8-1}{x^m-1}$, tiene 4 términos determinar el valor de $P = 3m^2 + 2m^3$. Sol. 28

2. Calcular el término independiente del cociente notable: $\dfrac{x^{24}-16p}{x^p - \dfrac{p}{2}}$ sabiendo que tiene 6 términos.

   A) 21 B) 15 C) 14 D) 32 E) Ninguno

3. Calcular n para que la expresión:

   $$\frac{x^{2n+2} - y^{3n-3}}{x^{2n+1} - y^{2n-2}}$$

   sea un cociente notable. Sol. 6

4. Determine el número de términos del cociente notable: $\dfrac{x^{6n+3} + a^{6n-22}}{x^{\frac{n-6}{2}} + a^{\frac{n-8}{2}}}$

   A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) Ninguno

5. Si el cociente notable: $\dfrac{x^8-1}{x^m-1}$ tiene cuatro términos, determine el valor de: $p = 3m^2 + 2m^3$

   A) 28 B) 20 C) 15 D) 18 E) Ninguno

6. Si el siguiente cociente es notable, determinar el número de términos que tiene

   $$\frac{x^{6n+3} + a^{6n-22}}{x^{\frac{n-6}{2}} + a^{\frac{n-8}{2}}}$$

   A) 25 B) 75 C) 35 D) 85 E) Ninguno

Capítulo 5

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir un polinomio racional y entero en x entre un binomio de la forma $ax \pm b$ es igual al valor numérico que adquiere dicho polinomio cuando se reemplaza en él, x por $\mp \frac{b}{a}$.

Demostración. En forma general, sea $P(x)$ racional y entero, divisor $ax \pm b$, en toda división se cumple:

$$D = d \cdot c + r$$

reemplazando por su equivalente:

$$P(x) = (ax \pm b)\, c + r$$

reemplazando $x = \mp \frac{b}{a}$:

$$P\left(\mp \frac{b}{a}\right) = \left[a\left(\mp \frac{b}{a}\right) \pm b\right] c + r$$

donde $\left[a\left(\mp \frac{b}{a}\right) \pm b\right] = 0$, por lo tanto:

$$P\left(\mp \frac{b}{a}\right) = r$$

5.0.3. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar el valor de k para que el polinomio $P(x) = 20x^3 - 7x^2 + 29x + k$ sea divisible entre $(4x + 1)$.

   A) -8 B) 6 C) 8 D) -6 E) Ninguno

   Solución. El divisor igualamos a cero: $4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$. El resto

viene a ser:

$$\begin{aligned} R &= 20\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 29\left(-\frac{1}{4}\right) + k \\ R &= -\frac{20}{64} - \frac{7}{16} - \frac{29}{4} + k \\ R &= -8 + k \end{aligned}$$

como la división es exacta, el resto es cero: $-8 + k = 0$, donde:

$$k = 8$$

2. Determinar n^2+m^2 para que el polinomio $P(x) = x^4+3x^3-5x^2+mx-n$, sea divisible entre el polinomio $Q(x) = x^2 + x - 2$.

A) 181 B) 19 C) 191 D) 91 E) Ninguno

Solución. El divisor igualamos a cero:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos dos valores. Para $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} P(2) &= (-2)^4 + 3(-2)^3 - 5(-2)^2 + m(-2) - n \\ &= 16 - 24 - 20 - 2m - n \\ &= -28 - 2m - n \end{aligned}$$

Para $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned} P(2) &= (1)^4 + 3(1)^3 - 5(1)^2 + m(1) - n \\ &= 1 + 3 - 5 + m - n \\ &= m - n - 1 \end{aligned}$$

igualando ambas ecuaciones a cero:

$$\begin{cases} 2m + n + 28 = 0 & (1) \\ m - n - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

resolviendo el sistema: (1) + (2): $3m + 27 = 0$, donde $m = -9$. Reemplazando en (2): $-9 - n - 1 = 0$, donde $n = -10$. Lo que nos pide es:

$$n^2 + m^2 = (-10)^2 + (-9)^2 = 181$$

3. Si α es una raíz de $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, determinar un polinomio $P(x)$ tal que

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x - \alpha} + \alpha^3 = xP(x)$$

A) $x-\alpha$ B) $x+\alpha$ C) $x+1+\alpha$ D) $x-\alpha+a$ E) Ninguno

Solución. Si α es un raíz del polinomio, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 &= 0 \\ \alpha^2(\alpha+1)+(\alpha+1) &= 0 \\ (\alpha+1)\left(\alpha^2+1\right) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\alpha=-1$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3}{x-\alpha} &= xP(x) \\ P(x) &= \frac{-1}{(x+1)\,x} \end{aligned}$$

4. El valor de n para que la siguiente división sea exacta:

$$\frac{nx^4-(1+2n)\,x^3-(2+3n)\,x^2+nx-3}{x-3}$$

es:

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) Ninguno

Solución. Haciendo $x-3=0 \Rightarrow x=3$, reemplazando, el resto es:

$$\begin{aligned} R &= n(3)^4-(1+2n)(3)^3-(2+3n)(3)^2+n(3)-3 \\ &= 81n-27-54n-18-27n+3n-3 \\ &= 3n-48 \end{aligned}$$

como la división es exacta el resto es cero, esto es: $3n-48=0$, donde:

$$n=16$$

5. Al dividir el polinomio $P(x)=6x^3-3x^2-kx-6$ por $(2x-3)$ se obtiene un residuo igual a cero. Hallar el valor de k.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) Niguno

Solución. El divisor igualamos a cero: $2x-3=0$, donde $x=\frac{3}{2}$ reemplazando y por la condición del problema la división es exacta, esto es $R=0$:

$$\begin{aligned} 6\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2-k\left(\frac{3}{2}\right)-6 &= 0 \\ 6\left(\frac{27}{8}\right)-3\left(\frac{9}{4}\right)-\frac{3k}{2}-6 &= 0 \\ 81-27-6k-24 &= 0 \\ 6k &= 30 \end{aligned}$$

simplificando $k=5$.

6. Hallar el resto (residuo) de la siguiente expresión polinómica:

$$P(x) = \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} - 3n + 16}{x-1}$$

A) 13 B) 7 C) −13 D) −7 E) Ninguno.

Solución. Aplicando teorema del residuo $x - 1 = 0$ de donde $x = 1$, reemplazando:

$$\begin{aligned} R &= P(1) = n(1)^n + (n-1)(1)^{n-1} + (n-2)(1)^{n-2} - 3n + 16 \\ &= n + n - 1 + n - 2 - 3n + 16 \end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$\boxed{R = 13}$$

7. Si dividimos $x^9 + 5x^4 + 3x^2 + 4$ entre $4x + 4$, se obtiene de residuo:

A) 1 B) 8 C) 7 D) 5 E) Ninguno.

Solución. Aplicando el teorema del residuo $4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$:

$$R = (-1)^9 + 5(-1)^4 + 3(-1)^2 + 4 = -1 + 5 + 3 + 4$$

donde el residuo es

$$\boxed{R = 11}$$

8. Hallar el resto de la división:

$$\frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} - 3x + 16}{x-1}$$

Solución. El denominador igualamanos a cero, esto es: $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$; sustituyendo

$$\begin{aligned} R &= n(1)^n + (n-1)(1)^{n-1} + (n-2)(1)^{n-2} - 3(1) + 16 \\ &= n + (n-1) + (n-2) - 3 + 16 \\ &= 3n + 10 \end{aligned}$$

9. Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x+a)^7 - \left(x^7 + a^7\right)}{x + 2a}$$

Solución. El denominador igualamos a cero: $x + 2a = 0 \Rightarrow x = -2a$; reemplazando:

$$\begin{aligned} R &= (-2a + a)^7 - \left[(-2a)^7 + a^7\right] \\ &= -a^7 - \left[-128a^7 + a^7\right] \end{aligned}$$

simplificando:

$$R = 126a^7$$

10. Hallar el resto en:

$$\frac{(x+y)^2+(x+y)(2z-1)+z(z-1)}{x+y+z-3}$$

Solución. Igualando a cero el denominador: $x+y+z-3=0 \Rightarrow x = 3-y-z$; reemplazando:

$$\begin{aligned} R &= (3-y-z+y)^2+(3-y-z+y)(2z-1)+z(z-1) \\ &= (3-z)^2+(3-z)(2z-1)+z(z-1) \\ &= 9-6z+z^2-2z^2+7z-3+z^2-z \end{aligned}$$

simplificando:

$$R=6$$

11. Hallar el resto en:

$$\frac{\left(5x^4+7x^2+5\right)^2+\left(5x^4+7x^2+7\right)^3+8}{5x^4+7x^2+8}$$

Solución. Haciendo un cambio de variables:

$$u=5x^4+7x^2$$

reemplazando, obtenemos la nueva división:

$$\frac{(u+5)^2+(u+7)^3+8}{u+8}$$

donde $u+8=0 \Rightarrow u=-8$; reemplazando:

$$R=(-8+5)^2+(-8+7)^3+8$$

simplificando:

$$R=16$$

12. Hallar el resto en:

$$\frac{(x-1)^{4n}\left(x^3+8\right)^3(x-4)^3}{x^2-2x+2}$$

Solución. Haciendo operaciones en el denominador:

$$(x-1)^{4n}\left(x^3+8\right)^3(x-4)^3=\left(x^2-2x+1\right)^{2n}(x+2)^3\left(x^2-x+4\right)^3(x-4)^3$$

ordenando:

$$\begin{aligned} &= \left(x^2-2x+1\right)^{2n}\left(x^2-2x+4\right)^3[(x+2)(x-4)]^3 \\ &= \left(x^2-2x+1\right)^{2n}\left(x^2-2x+4\right)^3\left(x^2-2x-8\right)^3 \end{aligned}$$

sustituyendo por: $u = x^2 - 2x$

$$\frac{(u+1)^{2n}(u+4)^3(u-8)^3}{u+2}$$

entonces del numerador igualamos a cero: $u+2=0 \Rightarrow u=-2$; sustituyendo:

$$\begin{aligned} R &= (-2+1)^{2n}(-2+4)^3(-2-8)^3 \\ &= (-1)^{2n}(2)^3(-10)^3 \end{aligned}$$

donde $(-1)^{2n}$, $2n$ es un número par, por lo tanto el signo negativo desaparece y viene a ser 1. Simplificando:

$$R = -8000$$

13. Hallar el resto en la división:

$$\frac{[3+(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)]^4}{x(x+5)+5}$$

Solución. Ordenando los factores y realizando operaciones:

$$\begin{aligned} &= \frac{[3+(x+2)(x+3)(x+1)(x+4)]^4}{x^2+5x+5} \\ &= \frac{\left[3+\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2+5x+4\right)\right]^4}{x^2+5x+5} \end{aligned}$$

ahora nos toca hacer el cambio de variables: $u = x^2+5x$, entonces:

$$\frac{[3+(u+6)(u+4)]^4}{u+5}$$

donde $u+5=0 \Rightarrow u=-5$, reemplazando en el resto:

$$R = [3+(-5+6)(-5+4)]^4$$

resolviendo:

$$R = 16$$

14. Hallar el resto en:

$$\frac{a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3-3a^2b^2c^2}{ab+ac+bc}$$

Solución. Agrupando el numerador:

$$= \frac{(ab)^3+(ac)^3+(bc)^3-3(ab)(ac)(bc)}{ab+ac+bc}$$

ahora hacemos como que ab es la variable $ab+ac+bc=0 \Rightarrow ab=-ac-bc$; sustituyendo:

$$\begin{aligned} R &= (-ac-bc)^3+(ac)^3+(bc)^3-3(-ac-bc)(ac)(bc) \\ &= -(ac)^3-3(ac)^2(bc)-3(ac)(bc)^2-(bc)^3+(ac)^3+(bc)^3+3(ac)^2(bc)+3(ac)(bc)^2 \end{aligned}$$

simplificando:

$$R=0$$

15. Sea el polinomio $P(x)=x^2+x+1$. Al dividir el polinomio $Q(x)=(x^2+x+1)P(x)$ por $R(x)=x^2+x-1$, se obtiene como residuo:

    A) 25 B) 16 C) 9 D) 4 E) Ninguno.

    Solución. Multiplicando:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2+x+1)P(x) \\ &= (x^2+x+1)(x^2+x+1) \\ &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \end{aligned}$$

factorizando:

$$Q(x)=(x^2+x+1)^2$$

ahora si $u=x^2+x$, la nueva división:

$$(u+1)^2 \div (u-1)$$

si $u-1=0$, donde $u=1$, reemplazando en el resto:

$$R=(1+1)^2=4$$

16. Determinar el valor de a de tal manera que el polinomio $P(x)=x^4-3x^3+ax+b$ sea divisible por $(4-2x+x^2)$.

    A) -8 B) -42 C) -24 D) 8 E) Ninguno.

    Solución. Aplicando la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l} +x^4 & -3x^3 & & +ax & +b & x^2-2x+4 \\ \cline{6-6} -x^4 & +2x^3 & -4x^2 & & & x^2-x-6 \\ \cline{1-3} & -x^3 & -4x^2 & +ax & & \\ & +x^3 & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4} & & -6x^2 & (a+4)x & +b & \\ & & +6x^2 & -12x & +24 & \\ \cline{3-5} & & & (a-8)x & +24+b & \end{array}$$

de donde $a-8=0$, entonces

$$\boxed{a=8}$$

17. Calcular el valor de la constante A para que la división del polinomio $P(x) = x^5 + (2 - A)x^2 - Ax + 20$ entre $(x + 2)$; se obtenga un residuo igual a 2.

A) 2 B) 4 C) -3 D) 9 E) Ninguno.

Solución. Aplicando el teorema del residuo tenemos $x = -2$, reemplazando en $P(-2)$, e igualando a 2, tenemos:

$$\begin{aligned} (-2)^5 + (2 - A)(-2)^2 - A(-2) + 20 &= 2 \\ -32 + 8 - 4A + 2A + 20 &= 2 \\ 2A &= -6 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{A = -3}$$

18. Al dividir el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ por $x - 1$, se obtiene un residuo igual a 2. Al dividir el mismo polinomio por $x^2 + 5x + 6$, se obtiene como residuo 12, hallar $a + b$.

A) 2 B) -2 C) 1 D) -1 E) Ninguno

Solución. De $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $R = 0$, esto es:

$$\begin{aligned} (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c &= 0 \\ a + b + c + 1 &= 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

en la segunda división el divisor es:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= 0 \\ (x + 3)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos dos soluciones: $x_1 + 3 = 0$ y $x_2 + 2 = 0$. Ahora, para $x_1 = -3$

$$\begin{aligned} (-3)^3 + a(-3)^2 + b(-3) + c &= 12 \\ -27 + 9a - 3b + c &= 12 \qquad (2) \end{aligned}$$

para $x_2 = -2$

$$\begin{aligned} (-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + c &= 12 \\ -8 + 4a - 2b + c &= 12 \qquad (3) \end{aligned}$$

simplificando (1), (2) y (3) respectivamente:

$$\begin{cases} a + b + c = -1 & (4) \\ 9a - 3b + c = 39 & (5) \\ 4a - 2b + c = 20 & (6) \end{cases}$$

resolviendo el sistema: $(5) - (4)$:

$$\begin{aligned} &8a - 4b = 40 \qquad \div 4 \\ &2a - b = 10 \qquad (7) \end{aligned}$$

y $(5)-(6)$:

$$5a-b=19 \qquad (8)$$

ahora $(8)-(7)$: $3a=9$.

$$a=3,$$

reemplazando en (8): $5\,(3)-b=19$

$$b=-4.$$

La suma de $a+b=-1$

19. Hallar el resto en:

$$\frac{\left(\dfrac{a-b}{2ab}\right)x^2-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{(a+b)\left(a^2-b^2\right)}{2ab}}{x-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}}$$

20. Hallar el resto en:

$$\frac{(x-1)^{n+2}+(x-1)^n\cdot x}{x^2-x+1}$$

21. Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x+y)^{4m}-(x-y)^{4m}}{(8xy)\left(x^2+y^2\right)}$$

22. Calcular m y n si la división:

$$\frac{x^n\,(x-a)^{3m}-256\,(3a-x)^{2n}}{x-2a}$$

es exacta.

23. Hallar m si la división no deja resto

$$\frac{x^8+\left(x^2-z^2\right)^2-mx^4\left(y^2+z^2\right)}{x^2-y-z}$$

24. Hallar m si la división deja por resto $49a^7$

$$\frac{(x+3a)^7-\left(x^7+ma^7\right)}{x+2a}$$

25. Calcular m si la división es exacta:

$$\frac{m\,(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(x+z)^3}{x+y+2z}$$

26. Hallar m para que el polinomio:

$$x^3 + x^2 - 3mx + 5$$

al dividirlo entre $(x-1)$ dé como resto el doble del resto de dividir dicho polinomio entre $(x-2)$.

27. Hallar el valor de: $E = 2m + 5n$. Si el resto de la división:

$$\frac{mx^8 + nx^6 - 3x^5 - 1}{x^3 + 1}$$

es igual a $8x^2 - 5$.

28. Hallar el valor de m si la división es exacta:

$$\frac{(2m+3)(x+y+z)^2 - (y+z-x)^2 + ... + m(z+x-y)^3 - (x+y-z)^3}{xyz}$$

29. Hallar el valor de $E = \frac{a}{b}$, si en la división:

$$\frac{(a-b)x^n + (a+b)^2 x^{n-1} + (a-b)^3 x^{n-2}}{x-a+b}$$

se obtiene como residuo $3b^{n+1}$.

30. Calcular el valor de:

$$E = \frac{b^2}{a^2 + c^2}$$

si la división

$$\frac{(a+b)x^3 + (b-c)x^2 + (b+c)x + (a-b)}{x^2 + h^2}$$

es exacta.

31. Determinar m para que el polinomio

$$x^4 + y^4 + z^4 - m\left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right)$$

sea dividido entre $x + y + z$.

32. Hallar el resto de la división

$$\frac{\left(15x^4 + 9x^2 + 13\right)^3 + \left(15x^4 + x^2 + 11\right)^2 + 13}{15^4 + 9x^2 + 10}$$

A) 40 B) 41 C) 42 D) 28 E) 26

33. Hallar el resto de la división

$$\frac{(x-2)^7+(x-3)^6+(x-4)^5+10}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

y dar la suma de los coeficientes de dicho resto.

A) 49 B) 211 C) -214 D) 46 E) 27

34. Hallar el resto en la división

$$\frac{(x+1)^{35}+7(x+1)^{28}+3(x+1)^7+3}{x^2+2x+2}$$

A) $6+4x$ B) $5+4x$ C) $5-4x$ D) $6-4x$ E) $2-4x$

35. Calcular m si la división

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)+m\left(x^4+y^4+z^4\right)}{x+y+z}$$

es exacta.

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3.

36. Hallar el resto de

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x+1)(x-1)}.$$

Para n, número par positivo.

A) nx B) x C) 0 D) $nx-n$ E) $n-nx$

37. Si el siguiente polinomio:

$$(mx+1)^2+(m+x)^2+mx$$

es divisible entre $(x+1)$. Calcular m.

A) 2 B) -2 C) 4 D) 5 E) 0

38. Calcular m si el resto de la división de

$$x^3-mx^2+7x-1 \text{ entre } x-2$$

es el triple del resto de dividir:

$$x^2-(m+2)x-11 \text{ entre } x+2.$$

A) -3 B) 4 C) 5 D) 3 E) -4.

39. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x+a)^4$ se obtuvo como residuo $x^3-3a^2x+2a^3$. Calcular el resto de dividir $P(x)$ entre $(x+a)^2$.

A) $x+a$ B) 4 C) xa^2+4x^3 D) $4a^3$ E) $x+4a$.

40. Hallar el residuo de

$$\left[x^{3^{(n+2)}}+3^{3n}\right]\div\left[x^9+3\right]$$

A) 3^n B) 3^{3^n} C) 3^{3^n-1} D) 0 E) $1-3^{n^3}$.

Capítulo 6

DESCOMPOSICION FACTORIAL

Para resolver muchos problemas algebraicos suele ser preciso representar el polinomio dado en forma del producto de dos o más polinomios o bien en forma del producto del polinomio por un monomio que contenga no menos de una variable. No obstante, no cada polinomio permite realizar la descomposición en factores sobre el campo de números reales. Por ejemplo, los poliniomios $x+3$, $x^2+6x+10$, no pueden ser descompuestos en factores. Semejantes polinomios reciben el nombre de *no reducibles*. Se considera qe la descomposición de polinomios en factores está terminada si los polinomios obtenidos son no reducibles.

1. $5a^2 + a$

   Solución. En este caso el factor común es a, por lo tanto:

   $$5a^2 + a = a\,(5a+1)$$

2. $9x^2 - 6xy + y^2$.

   Solución.

   $$\begin{aligned} 9\underset{3x}{x^2} - 6xy + \underset{y}{y^2} &= (3x)^2 - 2\,(3x)\,(y) + (y)^2 \\ & (3x-y)^2 \end{aligned}$$

3. $x^8 - 6x^4y^4 + y^8$.

   Solución.

   $$\begin{aligned} x^8 - 6x^4y^4 + y^8 &= x^8 - 2x^4y^4 + y^8 - 4x^4y^4 \\ &= \left(x^4 - y^4\right)^2 - 4x^4y^4 \\ &= \left(x^4 - y^4 - 2x^2y^2\right)\left(x^4 - y^4 + 2x^2y^2\right) \\ &= \left(x^4 - 2x^2y^2 - y^4\right)\left(x^4 + 2x^2y^2 - y^4\right) \end{aligned}$$

4. $16a^2 - 24ab + 9b^2$.

Solución.

$$\begin{aligned} 16a^2 - 24ab + 9b^2 &= (4a)^2 - 2(4a)(3b) + (3b)^2 \\ &= (4a - 3b)^2 \end{aligned}$$

5. $a^4 - 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 - 1 &= \left(a^2\right)^2 - 1 \\ &= \left(a^2 + 1\right)\left(a^2 - 1\right) \\ &= \left(a^2 + 1\right)(a + 1)(a - 1) \end{aligned}$$

6. $a^6 - 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} a^6 - 1 &= \left(a^3\right)^2 - 1 \\ &= \left(a^3 + 1\right)\left(a^3 - 1\right) \\ &= (a + 1)\left(a^2 - a + 1\right)(a - 1)\left(a^2 - a + 1\right) \end{aligned}$$

7. $a^5 + a^3 - a^2 - 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} a^5 + a^3 - a^2 - 1 &= a^3\left(a^2 + 1\right) - \left(a^2 + 1\right) \\ &= \left(a^2 + 1\right)\left(a^3 - 1\right) \\ &= \left(a^2 + 1\right)(a - 1)\left(a^2 + a + 1\right) \end{aligned}$$

8. $a^4 + 2a^3 - 2a - 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 + 2a^3 - 2a - 1 &= a^3(1 + 2a) - (2a + 1) \\ &= (2a + 1)\left(a^3 - 1\right) \\ &= (2a + 1)(a - 1)\left(a^2 + a + 1\right) \end{aligned}$$

9. $125a^6 + 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} 125a^6 + 1 &= \left(5a^2\right)^3 + 1 \\ &= \left(5a^2 + 1\right)\left(25a^4 + 5a^2 + 1\right) \end{aligned}$$

10. $25x^4 - 81y^2$.

    Solución.

$$\begin{aligned} 25x^4 - 81y^2 &= \left(5x^2\right)^2 - (9y)^2 \\ &= \left(5x^2 + 9y\right)\left(5x^2 - 9y\right) \end{aligned}$$

11. $4 + 4(x - y) + (x - y)^2$.

    Solución.

$$\begin{aligned} 4 + 4(x - y) + (x - y)^2 &= (x - y)^2 + 2(x - y)2 + 2^2 \\ &= (x - y + 2)^2 \end{aligned}$$

12. $x^2 + 2xy - 15y^2$.

    Solución.

$$x^2 + 2xy - 15y^2 = (x + 5y)(x - 3y)$$

13. $n^2 + n - 42$.

    Solucion.

$$n^2 + n - 42 = (n + 7)(n - 6)$$

14. $7x^2 + 31x - 20$.

    Solución.

$$7x^2 + 31x - 20 = \frac{(7x + 35)(7x - 4)}{7}$$

    simplificando:

$$= (x + 5)(7x - 4)$$

15. $m^4 + m^2n^2 + n^4$.

    Solución.

$$\begin{aligned} m^4 + m^2n^2 + n^4 &= m^4 + m^2n^2 + m^2n^2 + n^4 - m^2n^2 \\ &= \left(m^2\right)^2 + 2m^2n^2 + \left(n^2\right)^2 - m^2n^2 \\ &= \left(m^2 + n^2\right)^2 - m^2n^2 \\ &= \left(m^2 + mn + n^2\right)\left(m^2 - mn + n^2\right) \end{aligned}$$

16. $6m^4 + 7m^2 - 20$.

    Solución.

$$\begin{aligned} 6m^4 + 7m^2 - 20 &= \frac{\left(6m^2 + 15\right)\left(6m^2 - 8\right)}{6} \\ &= \left(2m^2 + 5\right)\left(3m^2 - 4\right) \end{aligned}$$

17. $(a+m)^2-(b+n)^2$.

Solución.

$$(a+m)^2-(b+n)^2=(a+m+b+n)(a+m-b-n)$$

18. x^6-4x^3-480.

Solución.

$$x^6-4x^3-480=\left(x^3-24\right)\left(x^3+20\right)$$

19. $2x(a-1)-a+1$.

Solución.

$$\begin{aligned} 2x(a-1)-a+1 &= 2x(a-1)-(a-1)\\ &= (a-1)(2x-1) \end{aligned}$$

20. a^4-18a^2+81.

Solución.

$$\begin{aligned} a^4-18a^2+81 &= \left(a^2\right)^2-2\left(a^2\right)(9)+9^2\\ &= \left(x^2-9\right)^2\\ &= (x+3)^2(x-3)^2 \end{aligned}$$

21. $a^{12}-2a^4+1$.

Solución.

$$\begin{aligned} a^{12}-2a^4+1 &= a^{12}-a^4+1-a^4\\ &= \left[\left(a^3\right)^4-a^4\right]+\left[1-a^4\right]\\ &= \left(a^3-a\right)\left(a^9+a^7+a^5+a^3\right)+(1-a)\left(1+a+a^2+a^3\right)\\ &= a^4\left(a^2-1\right)\left(a^6+a^4+a^2+1\right)+(1-a)\left(a^3+a^2+a+1\right)\\ &= a^4\left(a^2-1\right)\left[a^4\left(a^2+1\right)+\left(a^2+1\right)\right]+(1-a)\left[a^2(a+1)+(a+1)\right]\\ &= a^4\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)-(a-1)\left(a^2+1\right)(a+1)\\ &= \left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^4\left(a^4+1\right)-1\right)\\ &= \left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^8+a^4-1\right) \end{aligned}$$

22. $4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$

Solución.

$$\begin{aligned} 4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2 &= \left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\\ &= \left(b^2+2bc+c^2-a^2\right)\left[a^2-\left(b^2-2bc+c^2\right)\right]\\ &= \left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]\\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

23. $a^4 + 4a^3 - 5.$

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 + 4a^3 - 5 &= a^4 + 4a^3 - 1 - 4 \\ &= a^4 - 1 + 4a^3 - 4 \\ &= (a-1)\left(a^3 + a^2 + a + 1\right) + 4(a-1)\left(a^2 + a + 1\right) \\ &= (a-1)\left(a^3 + a^2 + a + 1 + 4a^2 + 4a + 4\right) \\ &= (a-1)\left(a^3 + 5a^2 + 5a + 5\right) \end{aligned}$$

24. $a^4 + 5a^2 + 1.$

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 + 5a^2 + 1 &= a^4 + 4a^2 + a^2 + 1 \\ &= \end{aligned}$$

25. $c^4 - (1 + ab)\,c^2 + ab$

Solución.

$$\begin{aligned} c^4 - (1 + ab)\,c^2 + ab &= \left(c^2 - 1\right)\left(c^2 - ab\right) \\ &= (c+1)(c-1)\left(c^2 - ab\right) \end{aligned}$$

26. $a^4 + 324. = \left(a^2 - 6{,}0a + 18{,}0\right)\left(6{,}0a + a^2 + 18{,}0\right)$

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 + 324 &= a^4 + 2a^2(18) + 18^2 - 36a^2 \\ &= \left(a^2 + 18\right)^2 - 36a^2 \\ &= \left(a^2 + 6a + 18\right)\left(a^2 - 6a + 18\right) \end{aligned}$$

27. $a^4 + a^3 + 1.$

Solución.

$$a^4 + a^3 + 1 = a^4 + a^3 + a + 1 - a$$

28. $a^8 + a^4 + 1.$

Solución.

$$\begin{aligned} a^8 + a^4 + 1 &= a^8 + a^4 + 2a^4 + 1 - 2a^4 \\ &= \left(a^4\right)^2 + 2a^4 + 1 - a^4 \\ &= \left(a^4 + 1\right)^2 - a^4 \\ &= \left(a^4 + 1 + a^2\right)\left(a^4 + 1 - a^2\right) \\ &= \left(a^4 + a^2 + 1\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right) \\ &= \left(a^4 + 2a^2 + 1 - 2a^2 + a^2\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right) \\ &= \left[\left(a^2 + 1\right)^2 - a^2\right]\left(a^4 - a^2 + 1\right) \\ &= \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 - a + 1\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right) \end{aligned}$$

29. $2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2$.

Solución.

$$\begin{aligned} 2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2 &= 2\left(a^4 + 2a^2 + 1\right) + a\left(a^2 + 1\right) \\ &= 2\left(a^2 + 1\right)^2 + a\left(a^2 + 1\right) \\ &= \left(a^2 + 1\right)\left(2a^2 + 2 + a\right) \\ &= \left(a^2 + 1\right)\left(2a^2 + a + 2\right) \end{aligned}$$

30. $a^4 + 3a^3 + 4a^2 - 6a - 12 = \left(a^2 + 3a + 6\right)\left(a^2 - 2\right)$

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 + 3a^3 + 4a^2 - 6a - 12 &= a^4 + 4a^2 - 12 + 3a^3 - 6a \\ &= \left(a^2 + 6\right)\left(a^2 - 2\right) + 3a\left(a^2 - 2\right) \\ &= \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 + 3a + 6\right) \end{aligned}$$

31. $a^4 + 2a^3 - 2a - 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} a^4 + 2a^3 - 2a - 1 &= a^4 - 1 + 2a\left(a^2 - 1\right) \\ &= (a - 1)\left(a^3 + a^2 + a + 1\right) + 2a(a + 1)(a - 1) \\ &= (a - 1)\left(a^3 + a^2 + a + 1 + 2a^2 + 2a\right) \\ &= (a - 1)\left(a^3 + 3a^2 + 3a + 1\right) \\ &= (a - 1)(a + 1)^3 \end{aligned}$$

32. $a^5 + a^3 - a^2 - 1$.

Solución. Primera forma

$$\begin{aligned} a^5 + a^3 - a^2 - 1 &= a^2\left(a^3 - 1\right) + \left(a^3 - 1\right) \\ &= \left(a^3 - 1\right)\left(a^2 + 1\right) \\ &= (a - 1)\left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Segunda forma:

$$\begin{aligned} a^5 + a^3 - a^2 - 1 &= a^3\left(a^2 + 1\right) - \left(a^2 + 1\right) \\ &= \left(a^2 + 1\right)\left(a^3 - 1\right) \end{aligned}$$

33. $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$.

Solución.

$$\begin{aligned}
a^5+a^4+a^3+a^2+a+1 &= a^4(a+1)+a^2(a+1)+(a+1)\\
&= (a+1)\left(a^4+a^2+1\right)\\
&= (a+1)\left(a^4+2a^2+1-a^2\right)\\
&= (a+1)\left[\left(a^2+1\right)^2-a^2\right]\\
&= (a+2)\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a+1\right)
\end{aligned}$$

34. Al factorizar el polinomio:

$$4a^3x^2+8a^2x^3-2a^2x-a^3+4ax^4-ax^2$$

la suma de sus 5 factores es:

A) $6x+3a$ B) $6x-a$ C) $3a+2x$ D) $2a+3x$ E) Ninguno

35. Al factorizar $P(x)=x^3+5x^2+8x+4$. La suma de los coeficientes del factor de menor grado es:

A) 3 B) -3 C) 2 D) -2 E) Ninguno

Solución. **Primera forma:**

$$\begin{aligned}
x^3+5x^2+8x+4 &= x^3+x^2+4x^2+8x+8-8+4\\
&= x^2(x+1)+4x^2+8(x+1)-4\\
&= (x+1)\left(x^2+8\right)+4x^2-4\\
&= (x+1)\left(x^2+8\right)+4(x+1)(x-1)\\
&= (x+1)\left(x^2+4x+4\right)\\
&= (x+1)(x+2)^2
\end{aligned}$$

entonces el factor de menor coeficiente es $\left(x^1+1^1\right)$, sumando sus coeficientes resulta 2.

36. Un factor de la siguiente expresión algebraica

$$E=4x^4+8x^2y^4+9y^8$$

es:

A) $2x^2+3y^4-2xy^2$ B) $2x^2+3y^4$ C) $2x^2+y^4$ D) $2x^2+3y^4+2xy^4$ E) Ninguno

37. Factorizar el polinomio

$$P(x)=2x^4+x^3+4x^2+x+2$$

e indicar uno de los factores

A) $x-1$ B) x^2+1 C) $x+2$ D) $x-2$ E) Ninguno

38. Factorizando el polinomio $4x^5+4x^4-x^3+x^2-5x-3$, el máximo número de factores de primer grado es:

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) Ninguno

39. Si $a+b+c=0$, el valor de la expresión:

$$ab\left(c^2+a+b\right)+bc\left(a^2+b+c\right)+ac\left(b^2+c+a\right)$$

A) abc B) $-abc$ C) $3abc$ D) $-3abc$ E) Ninguno

40. Calcular el valor de

$$E=b\left(a-b+c\right)^2+c\left(b-c+a\right)^2+a\left(c-a+b\right)^2$$

Si $abc=2$ y $a+b+c=0$.

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) Ninguno

41. Si $a+b+c=0$, y $abc=\dfrac{1}{4}$ el valor numérico de la siguiente expresión será:

$$E=ab\left(a+b-c\right)^4+bc\left(b+c-a\right)^4+ac\left(c+a-b\right)^4$$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12 E) Ninguno

42. Si $a+b+c=4$, el valor de la expresión

$$E=a^2+a\left(2b-1\right)+b^2+b\left(2c-1\right)+c^2+c\left(2a-1\right)$$

es:

A) 2 B) 6 C) 12 D) 20 E) Ninguno

43. Descompongamos en factores:

$$a^3-5a^2-a+5$$

Solución. Realicemos la agrupación y, después, saquemos de los paréntesis el factor común:

$$\begin{aligned}a^3-5a^2-a+5 &= a^2\left(a-5\right)-\left(a-5\right)\\ &= \left(a-5\right)\left(a^2-1\right)\\ &= \left(a-5\right)\left(a+1\right)\left(a-1\right)\end{aligned}$$

44. Descompongamos el polinomio en factores

$$a^2-2a^3b-2ab^3+b^2$$

Solución. Unamos los sumandos extremos en un grupo y los medios, en otro y en el segundo grupo sacamos de los paréntesis el factor común. Obtengamos

$$\begin{aligned}a^2-2a^3b-2ab^3+b^2 &= \left(a^2+b^2\right)-2ab\left(a^2+b^2\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)\left(1-2ab\right)\end{aligned}$$

45. Descomponr el polinomio en factores:

$$a^3 - 7a^2 + 7a + 15$$

Solución. Representamos los términos segundo y tercero del polinomio prefijado de la forma siguiente $-7a^2 = -3a^2 - 4a^2$, $7a = 12a - 5a$. Entonces escribimos:

$$a^3 - 7a^2 + 7a + 15 = a^3 - 3a^2 - 4a^2 + 12a - 5a + 15$$

Agrupamos los sumandos a pares y en cada grupo sacamos de los paréntesis los factores comunes:

$$\begin{aligned} &= \left(a^3 - 3a^2\right) - \left(4a^2 - 12a\right) - (5a - 15) \\ &= a^2 (a - 3) - 4a (a - 3) - 5 (a - 3) \\ &= (a - 3) \left(a^2 - 4a - 5\right) \end{aligned}$$

Queda por descomponer en factores el polinomio $a^2 - 4a - 5$. Esto es posible de realizar con dos procedimientos.

1er. Procedimiento. Tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 - 4a - 5 &= a^2 + a - 5a - 5 \\ &= a (a + 1) - 5 (a + 1) \\ &= (a + 1) (a - 5) \end{aligned}$$

2do. Procedimiento. El polinomio $a^2 - 4a - 5$, lo descomponemos en dos factores según la forma $x^2 + bx + c$, es decir necesitamos dos números, que multiplicados me den 5 y restados 4, estos son

$$(x - 5) (x + 1)$$

Así pues:

$$a^3 - 7a^2 + 7a + 15 = (a - 3) (x - 5) (x + 1)$$

46. Descomponer en factores

$$ab (a + b) - bc (b + c) + ac (a - c)$$

Solución. Aprovechamos que la expresión en los primeros paréntesis es la suma de las expresiones contenidas en los paréntesis segundo y tercero:

$$\begin{aligned} (a + b) &= a + b + c - c \\ &= (b + c) + (a - c) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} ab (a + b) - bc (b + c) + ac (a - c) &= ab ((b + c) + (a - c)) - bc (b + c) + ac (a - c) \\ &= ab (b + c) + ab (a - c) - bc (b + c) + ac (a - c) \end{aligned}$$

A continuación, efectuamos la agrupación de los términos y sacamos de los paréntesis el factor común. Obtenemos:

$$\begin{aligned} &= (b+c)(ab-bc)+(a-c)(ab+ac) \\ &= (b+c)\,b\,(a-c)+(a-c)\,a\,(b+c) \\ &= (b+c)(a-c)(b+a) \end{aligned}$$

47. Descompongamos en factores:

$$4a^3 - 12ab + 5b^2$$

Solución. Completamos el binomio $4a^3 - 12ab$ hasta cuadrado perfecto. Obtenemos: $(2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} &= \left(4a^2 - 12ab + 9b^2\right) - 9b^2 + 5b^2 \\ &= (2a-3b)^2 - 4b^2 \\ &= (2a-3b+2b)(2a-3b-2b) \\ &= (2a-b)(2a-5b) \end{aligned}$$

48. Descomponer en factores

$$a^4 - 10a^2 + 169$$

Solución. Advirtiendo qe $a^4+169 = \left(a^2\right)^2+13^2$ y completando esta suma hasta el cuadrado perfecto, obtenemos

$$\begin{aligned} &= \left(a^4 + 26a^2 + 169\right) - 26a^2 - 10a^2 \\ &= \left(a^2+13\right)^2 - 36a^2 \\ &= \left(a^2+6a+13\right)\left(a^2-6a+13\right) \end{aligned}$$

49. Descomponer en factores:

$$a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$$

Solución. Como

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= \left(a^3\right)^2 - \left(b^3\right)^2 \\ &= \left(a^3+b^3\right)\left(a^3-b^3\right) \\ &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= \left(a^4 + 2a^2b^2 + b^4\right) - a^2b^2 \\ &= \left(a^2+b^2\right)^2 - a^2b^2 \\ &= \left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right) \end{aligned}$$

entonces

$$= (a+b)(a-b)\left(a^2-ab+b^2\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)^2$$

50. Factorizando el polinomio $4x^5+4x^4-x^3+x^2-5x-3$ el máximo número de factores de primer grado es:

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) Ninguno.

Solución. Aplicando Ruffini:

$4x^5+4x^4-x^3+x^2-5x-3=(x-1)(2x+3)(2x+1)\left(x^2+1\right)$

	4	4	−1	1	−5	−3
1		4	8	7	8	3
	4	8	7	8	3	0

el nuevo polinomio resulta:

$$(x-1)\left(4x^4+8x^3+7x^2+8x+3\right)=0$$

Sumando y restando $4x^2$ y ordenado para factorizar

$$(x-1)\left(4x^4+4x^2+8x^3+8x+3x^2+3\right)=0$$

tenemos

$$(x-1)\left[4x^2\left(x^2+1\right)+8x\left(x^2+1\right)+3\left(x^2+1\right)\right]=0$$

Factorizando:

$$(x-1)\left(x^2+1\right)\left(4x^2+8x+3\right)=0$$

Factorizando en dos factores el polinomio $4x^2+8x+3$

$$\frac{(4x+6)(4x+2)}{4}$$

Simplificando:

$$(x-1)\left(x^2+1\right)(2x+3)(2x+1)=0$$

Finalmente tenemos 3 factores de primer grado.

51. Un factor de la siguiente expresión algebraica

$$E=4x^4+8x^2y^4+9y^8$$

es:

A) $2x^2+3y^4-2xy^2$ B) $2x^2+4y^4$ C) $2x^2+y^4$ D) $2x^2+3y^4+2xy^4$ E) Ninguno.

Solución. Completando a trinomio cuadrado perfecto

$$\begin{aligned}
E &= 4x^4+8x^2y^4+9y^8\\
&= 4x^4+8x^2y^4+4x^2y^4+9y^8-4x^2y^4\\
&= 4x^4+12x^2y^4+9y^8-4x^2y^4\\
&= \left(2x^2+3y^4\right)^2-\left(2xy^2\right)^2.
\end{aligned}$$

Desarrollando diferencia de cuadrados:

$$E = \left(2x^2 + 3y^4 - 2xy^2\right)\left(2x^2 + 3y^4 + 2xy^2\right),$$

entonces uno de los factores es

$$\boxed{2x^2 + 3y^4 - 2xy^2}$$

52. Si $a = 1$, la siguiente expresión se reduce

$$E = \frac{(x-a)^2 + 2\left(x^2 - a^2\right) + (x+a)^2}{(x+a)^2 - (x-a)^2}$$

A) x^2 B) $-x^2$ C) $-x$ D) x E) Ninguno.

Capítulo 7

MCD Y MCM

1. Hallar el MCD de los siguientes polinomios:

   a) $A(x) = 15x^4 + 2x^2 - 1$; $B(x) = 20x^4 + x^2 - 1$ y $C(x) = 25x^4 - 1$. Sol. $MCD = 5x^2 - 1$

   b) $P(x) = x^9y^2 + xy^{10} - 2x^5y^6$; $Q(x) = 3x^4y^3\left(x^2 + y^2\right) + x^2y\left(x^6 + y^6\right)$ y $R(x) = x^4y - x^3y^3 - xy^5 + x^2y^3$

2. Determinar la suma de los coeficientes del MCM de los siguientes polinomios: $P(x) = x^2 - 1$; $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$; $R(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

   A) 2 B) 3 C) 6 D) 0 E) Ninguno

3. Teniendo tres polinomios A, B y C, se conoce que el $MCD(A, B) = (x + 1)^2$ y el $MCD(B, C) = x^2 - 1$. Hallar el $MCD(A, B, C)$.

   A) $x + 1$ B) $x - 1$ C) $(x - 1)^2$ D) $(x + 1)^2$ E) Ninguno

4. Hallar el MCD y el MCM de los polinomios:

   a) $P(x) = x^5 - ax^4 - a^4x + a^5$ y $Q(x) = x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x$. Sol. $MCD = (x - a)^2(x + a)$

   b) $A(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$; $B(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y $C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Sol. $MCD = (x + 2)^2$ y $MCM = (x + 2)^3(x + 1)(x - 1)$

5. Teniendo tres polinomios A, B y C, se conoce que el $MCD(A, B) = (x + 1)^2$ y el $MCD(B, C) = x^2 - 1$. Hallar el MCD de los tres polinomios.

   A) $(x + 1)$ B) $(x - 1)$ C) $(x - 1)^2$ D) $(x + 1)^2$ E) Ninguno.

Capítulo 8

FRACCIONES

Simplificar o reducir a su más simple expresión:

1. $\dfrac{a^4b^2 - a^2b^4}{a^4 - b^4}$

2. $\dfrac{3x^2 + 19x + 20}{6x^2 + 17x + 12}$.

3. $\dfrac{8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3}{6x^2 + xy - y^2}$

4. $\dfrac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{(a+c)^2 - (b-d)^2}$

5. $\dfrac{\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 - 9\right)}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x - 6)}$

6. $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 15}{x^4 - 9}$

7. $\dfrac{x^4 - 7x^2 - 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 10x + 24}$

8. $\dfrac{a^4 + 6a^2 - 7}{a^4 + 8a^2 - 9}$

9. $\dfrac{6x^2 + 3}{42x^5 - 9x^3 - 15x}$

10. $\dfrac{a^5 - a^3 - a^2 + 1}{a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6}$

11. $\dfrac{5a^2 - a - 4}{a^3 - 1}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{5a^2-a-4}{a^3-1} &= \frac{(a-1)(5a+4)}{(a-1)(a^2+a+1)}\\ &= \frac{5a+4}{a^2+a+1}\end{aligned}$$

12. $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1} &= \frac{a^4\left(a^2+1\right)+\left(a^2+1\right)}{a^2(a+1)+(a+1)}\\ &= \frac{\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)}{(a+1)(a^2+1)}\\ &= \frac{(a+1)\left(a^3-a^2+a-1\right)}{a+1}\\ &= a^3-a^2+a-1\end{aligned}$$

13. $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{a^4+a^2-2}{a^6+8} &= \frac{\left(a^2+2\right)\left(a^2-1\right)}{\left(a^2\right)^3+2^3}\\ &= \frac{\left(a^2+2\right)(a+1)(a-1)}{(a^2+2)(a^4+2a^2+4)}\\ &= \frac{(a+1)(a-1)}{a^4+2a^2+4}\end{aligned}$$

14. $\dfrac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15} &= \frac{\left(a^2-4\right)\left(a^2+3\right)}{(a^2+5)(a^2+3)}\\ &= \frac{(a+2)(a-2)}{a^2+5}\end{aligned}$$

15. $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6} &= \frac{a^4+a^2b^2+b^4}{(a^2)^3-(b^2)^3}\\ &= \frac{a^4+a^2b^2+b^4}{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}\\ &= \frac{1}{(a+b)(a-b)}\end{aligned}$$

16. Simplificar la fracción algebraica:

$$\frac{a-b+\dfrac{a^2+b^2}{a+b}}{a+b-\dfrac{a^2-2b^2}{a-b}}\cdot\frac{b+\dfrac{b^2}{a}}{a-b}\cdot\frac{4b}{1+\dfrac{2a-b}{b}}$$

A) $a-2b$ B) $a-b$ C) $4b$ D) $2a-b$ E) Ninguno

8.0.4. OPERACIONES CON FRACCIONES

Simplificar:

1. $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{x-1}{2x-4}+\dfrac{x+8}{x^2-4}$
2. $\dfrac{2x}{3x^2+11x+6}+\dfrac{x+1}{x^2-9}+\dfrac{1}{3x+2}$
3. $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{4xy}{x^2-y^2}$
4. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x-3}+\dfrac{x-3}{2x^2-3x-2}+\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$
5. $\dfrac{a-2}{a-1}+\dfrac{a+3}{a+2}+\dfrac{a+1}{a-3}$
6. $\dfrac{1}{4a+4}-\dfrac{1}{8a-8}-\dfrac{1}{12a^2+12}$
7. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{3}{x^2+2x-3}-\dfrac{x}{x^2+5x+6}$
8. $\dfrac{3}{x^2+x+1}-\dfrac{x+2}{(x-1)^2}-\dfrac{1-9x}{(x^3-1)(x-1)}$
9. $\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{a+b}{2a^2+2ab+2b^2}-\dfrac{1}{2a-2b}$
10. $\dfrac{2a^2-3}{10a+10}-\dfrac{a+1}{50}-\dfrac{9a^2-14}{50a+50}$

11. $\dfrac{x}{a^2-ax}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{x+1}{x^2-x-20}-\dfrac{x+4}{x^2-4x-5}+\dfrac{x+5}{x^2+5x+4}$

13. $\dfrac{2x+1}{12x+8}-\dfrac{x^2}{6x^2+x-2}+\dfrac{2x}{16x-8}$

14. $\dfrac{1-x^2}{9-x^2}-\dfrac{x^2}{9+6x+x^2}-\dfrac{6x}{9-6x+x^2}$

15. $\dfrac{2}{2x^2+5x+3}-\dfrac{1}{2x^2-x-6}+\dfrac{3}{x^2-x-2}$

16. $\dfrac{7a}{6m^2}\times\dfrac{3m}{10n^2}\times\dfrac{5n^4}{14ax}$

17. $\dfrac{a^2-ab+a-b}{a^2+2a+1}\times\dfrac{3}{6a^2-6ab}$

18. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-16}\times\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+x^2}\times\dfrac{x^2+4x}{x^2+4x+4}$

19. $\dfrac{x^2+4ax+4a^2}{3ax-6a^2}\times\dfrac{2ax-4a^2}{ax+a}\times\dfrac{6a+6x}{x^2+3ax+2a^2}$

20. $\dfrac{x^4+27x}{x^3-x^2+x}\times\dfrac{x^4+x}{x^4-3x^3+9x^2}\times\dfrac{1}{x\left(x+3\right)^2}\times\dfrac{x^2}{x-3}$

21. $\dfrac{15m^2}{10ax^3}\div\dfrac{20y^3}{38a^3x^4}$

22. $\dfrac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2}\div\dfrac{5a^2}{a^2b+3ab^2}$

23. $\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y}\div\dfrac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}$

24. $\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}$

25. $\dfrac{15x^2+7x-2}{25x^3-x}\div\dfrac{6x^2+13x+6}{25x^2+10x+1}$

26. Simplificar a su mínima expresión:

$$E=\frac{3}{2x+2}-\frac{1}{4x-4}-\frac{4}{8-8x^2}$$

A) $\dfrac{5}{4\left(x+1\right)}$ B) $\dfrac{-5}{4\left(x+1\right)}$ C) $\dfrac{5}{4\left(x-1\right)}$ D) $\dfrac{-5}{4\left(x+1\right)}$ E) Ninguno

27. La expresión simplificada de:

$$E = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

es:

A) $\dfrac{3x+2}{2x-1}$ B) $\dfrac{3x+2}{2x+1}$ C) $\dfrac{3x-2}{2x+2}$ D) $\dfrac{3x-2}{2x-1}$ E) Ninguno

Solución.Simplificando:

$$\begin{aligned} E &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{x+1}} \\ &= 1 + \frac{x+1}{2x+1} \\ &= \frac{2x+1+x+1}{2x+1} \end{aligned}$$

finalmente:

$$E = \frac{3x+2}{2x+1}$$

28. Calcular el valor de

$$E = \left[\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right]^{-1}\left[\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}}\right]$$

A) ab B) ab^2 C) a^2b D) a^2b^2 E) Ninguno

Solución. Simplificando:

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right]^{-1}\left[\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}}\right] = \left[\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right]\left[\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}}\right] \\ &= \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2b^2}}\right) = \left(\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}\right)\left(\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{1}{a^2b^2}}\right) \\ &= \frac{a^2b^2\,(b+a)}{ab\,(b^2-a^2)}\cdot\frac{a^2b^2\,(b-a)}{ab} = a^2b^2 \end{aligned}$$

29. El resultado de simplificar la expresión:

$$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \frac{x^2-\left(x^2-1\right)^2}{x^2\,(x+1)^2-1} + \frac{x^2\,(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$$

es:

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) Ninguno

30. Si $a+b+c=4$, el valor de la expresión:

$$E = a^2 + a(2b-1) + b^2 + b(2c-1) + c^2 + c(2a-1)$$

es:

A) 2 B) 20 C) 6 D) 12 E) Ninguno.

Solución. Elevando al cuadrado ambos miembros de

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= 4^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 &= 16 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc &= 16 \end{aligned}$$

y reemplazando

$$\begin{aligned} E &= a^2 + 2ab - a + b^2 + 2bc - b + c^2 + 2ac - c \\ &= \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}_{16} - \underbrace{(a+b+c)}_{4} \\ &= 16 - 4 \end{aligned}$$

de aquí

$$\boxed{E = 12}$$

31. La expresión simplificada de

$$E = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

es:

A) $E = \dfrac{3x+2}{2x-1}$ B) $E = \dfrac{3x+2}{2x+1}$ C) $E = \dfrac{3x-2}{2x+1}$ D) $E = \dfrac{3x-2}{2x-1}$ E) Ninguno.

Solución. Efectuando operaciones:

$$\begin{aligned} E &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{x+1}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1+x}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2x+1+x+1}{2x+1} \end{aligned}$$

finalmente

$$\boxed{E = \frac{3x+2}{2x+1}}$$

32. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(3-\frac{4b+20a}{2b+5a}\right)+\left(4-\frac{16a}{b}+\frac{15a^2}{b^2}\right)\times\left(\frac{4a}{b}+4-\frac{15a^2}{b^2}\right)$$

cuyo resultado es:

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Ninguno

33. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}$$

A) $\frac{3x-1}{x^3-1}$ B) $\frac{3x-1}{1-x^3}$ C) $\frac{3x+1}{x^3-1}$ D) $\frac{3x+1}{1+x^3}$ E) NInguno

8.1. TRANSFORMACIONES IDENTICAS

La sustitución de una expresión analítica por otra idénticamente igual a ella en cierto conjunto, lleva el nombre de transformación idéntica en este conjunto de la expresión dada.

Al realizar transformaciones idénticas de una expresión es posible la variación de su campo de definición.

8.1.1. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Simplificar la expresión:

$$\frac{2a^2+ab-b^2}{a+b}$$

Solución. Representando ab como la diferencia de los términos semejantes $2ab-ab$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{2a^2+ab-b^2}{a+b} &= \frac{2a^2+2ab-ab-b^2}{a+b}\\ &= \frac{2a\,(a+b)-b\,(a+b)}{a+b}\\ &= \frac{(a+b)\,(2a-b)}{a+b}\end{aligned}$$

simplificando

$$=2a-b$$

2. Encontrar el valor verdadero de la siguiente expresion

$$E=\frac{2x^2+1-2x^3+x^5-2x}{4x+x^3-4-x^2}$$

cuando $x=1$, es:

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) $\frac{1}{5}$ D) 5 E) Ninguno.

Solución. Reemplazando $x = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1)^5 - 2(1)^3 + 2(1)^2 - 2(1) + 1}{4(1) + (1)^3 - 4 - (1)^2} \\ E &= \frac{1 - 2 + 2 - 2 + 1}{4 + 1 - 4 - 1} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Debemos eliminar esta indeterminación, entonces factorizando

$$\begin{aligned} E &= \frac{(x-1)\left(x^4 + x^3 - x^2 + x - 1\right)}{(x-1)(x^2+4)} \\ E &= \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

Reemplazando nuevamente

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1)^4 + (1)^3 - (1)^2 + 1 - 1}{1^2 + 4} \\ &= \frac{1 + 1 - 1 + 1 - 1}{1 + 4} \end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{E = \frac{1}{5}}$$

3. Calcular el valor de:

$$E = \left[\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}\right]^{-1} \left[\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} \cdot b^{-2}}\right]$$

A) a^2 B) b^2 C) a^2b^2 D) 1 E) Ninguno.

Solución. Aplicando $\left(a^{-1} + b^{-1}\right)\left(a^{-1} - b^{-1}\right) = a^{-2} - b^{-2}$

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}\right]^{-1} \left[\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} \cdot b^{-2}}\right] \\ &= \left[\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}\right] \left[\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} \cdot b^{-2}}\right] \\ &= \frac{a^2b^2\left(a^{-2} - b^{-2}\right)}{(a^{-2} - b^{-2})} \end{aligned}$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{E = a^2b^2}$$

4. Efectuar:

$$E = \frac{\left\{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2-4\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2}{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}^2-\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3-\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}^2}$$

A) $4ab$ B) $\frac{4}{ab}$ C) $16ab$ D) $\frac{16}{ab}$ E) 4.

5. Si $a = 1$, la siguiente expresión se reduce:

$$E = \frac{(x-a)^2+2\left(x^2-a^2\right)+(x+a)^2}{(x+a)^2-(x-a)^2}$$

A) x^2 B) $-x^2$ C) $-x$ D) x E) Ninguno.

Solución. Aplicando algunos conceptos algebraicos tenemos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(x-a)^2+2\left(x^2-a^2\right)+(x+a)^2}{(x+a)^2-(x-a)^2} \\ &= \frac{(x-a)^2+2\left(x-a\right)\left(x+a\right)+(x+a)^2}{\left(x+a-x+a\right)\left(x+a+x-a\right)} \\ &= \frac{\left[(x-a)+(x+a)\right]^2}{4ax} = \frac{4x^2}{4ax} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\boxed{E = x}$$

6. La expresión algebraica siguiente:

$$\frac{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}{6x^2+xy-y^2}$$

se simplifica a:

A) $\frac{2x+y}{3x-y}$ B) $\frac{3x+y}{2x+y}$ C) $\frac{(2x+y)^2}{3x-y}$ D) $\frac{(x+y)^2}{2x+y}$ E) Ninguno

7. Simplificar la expresión:

$$\frac{a^4-10a^2+169}{a^2+6a+13}$$

8. $\frac{xy}{3x^2y-3xy^2}$

9. $\frac{x^3+4x^2-21x}{x^3-9x}$

10. $\dfrac{a^2-ab-6b^2}{a^3x-6a^2bx+9ab^2x}$

11. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

12. $\dfrac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}$

13. $\dfrac{5a^2-a-4}{a^3-1}$

14. $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$

15. $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$

16. $\dfrac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$

17. $\dfrac{2a^4+7a^2+6}{3a^4+3a^2-6}$

18. $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$

19. $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6}$

20. Simplificar la siguiente expresión algebraica y determinar su valor:

$$E=\frac{\left(x^2-y^{-2}\right)^2\left(x-y^{-1}\right)^{-2z}}{\left(y^2-x^{-2}\right)^{-2}\left(y+x^{-1}\right)^{2z}}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) Ninguno

8.2. VALOR VERDADERO

1. Al descomponer en fracciones parciales $\dfrac{3x+8}{x^2+2x-3}$ el valor numérico de la fracción, para $x=-1$ es:

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $-\dfrac{5}{4}$ C) $\dfrac{6}{5}$ D) $-\dfrac{2}{5}$ E) Ninguno

Solución. Reemplazando el valor $x=-1$ en la fracción, tenemos:

$$\frac{3(-1)+8}{(-1)^2+2(-1)-3}=\frac{-3+8}{1-2-3}$$

el valor verdadero de la fracción es: $-\dfrac{5}{4}$

2. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$, para $x = 1$.
3. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{2x-6}{3x-9}$, para $x = 3$.
4. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$, para $x = 2$.
5. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-x-6}$, para $x = 3$.
6. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, para $x = 1$.
7. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$, para $x = 3$.
8. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$, para $x = \dfrac{1}{2}$.
9. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^4-5x^2+4}$, para $x = 1$.
10. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^5-2x^4-6x^3+20x^2-15x-2}{x^3-4x^2+7x-6}$, para $x = 2$.
11. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^4-10x^3+36x^2-54x+27}{x^4-11x^3+45x^2-81x+54}$, para $x = 3$.
12. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-5x^2+4}$, para $x = 1$.
13. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^5-1}{x^3-1}$, para $x = 1$.
14. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$, para $x = 0$.
15. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{(x-1)^3-1}{x-2}$, para $x = 2$.
16. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$, para $x = 2$.
17. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{(1+x)^2-(1-x)^3}{x}$, para $x = 0$.
18. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$, para $x = 0$.

19. Encontrar el valor verdadero de la siguiente expresión:

$$E = \frac{2x^2 + 1 - 2x^3 + x^5 - 2x}{4x + x^3 - 4 - x^2}$$

cuando $x = 1$.

A) $\dfrac{1}{4}$ B) 4 C) $\dfrac{1}{5}$ D) 5 E) Ninguno

20. Determinar el verdadero valor de la siguiente expresión para $x = 5$:

$$E = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x - 5}{3x^2 - 13x - 10}$$

A) $\dfrac{17}{21}$ B) $-\dfrac{17}{21}$ C) $\dfrac{21}{17}$ D) $-\dfrac{21}{17}$ E) Ninguno

21. Si se racionaliza el denominador de la expresión:

$$E = \frac{x - 5}{\sqrt{x - 4} - \sqrt{3x - 14}}$$

se obtiene una nueva expresión cuyo valor numérico para $x = 5$ es:

A) -2 B) -1 C) 0 D) 3 E) Ninguno

22. Hallar el valor verdadero de: $f(a) = \dfrac{a^3 - 8}{a^2 + 11a - 26}$ para $a = 2$.

Solución. Reemplazando $a = 2$ en la fracción:

$$f(2) = \frac{(2)^3 - 8}{(2)^2 + 11(2) - 26} = \frac{0}{0}$$

la fracción $\dfrac{0}{0}$ es indeterminado, por lo tanto debemos transformar la fracción:

$$f(a) = \frac{a^3 - 8}{a^2 + 11a - 26} = \frac{(a - 2)\left(a^2 + 2a + 4\right)}{(a + 13)(a - 2)}$$

simplificando:

$$f(a) = \frac{a^2 + 2a + 4}{a + 13}$$

ahora reemplazando el valor $a = 2$, en la última fracción: $f(2) = \dfrac{(2)^2 + 2(2) + 4}{2 + 13}$, donde:

$$f(2) = \frac{4}{5}$$

23. $f(x)=\dfrac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}=(x+2)^{-1}(x+1)^{-1}(3x-2)$ para $x=2$.

Solución. Reemplazando $x=2$ en la fracción:

$$f(2)=\frac{3(2)^3-5(2)^2-4(2)+4}{(2)^4+2(2)^3-3(2)^2-8(2)-4}=\frac{24-20-8+4}{16+16-12-16-4}=\frac{0}{0}$$

la fracción es indeterminada, por lo tanto debemos transformar la fracción:

$$f(x)=\frac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}$$

aplicando Ruffini para: $3x^3-5x^2-4x+4$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -5 & -4 & +4 \\
2 & & 6 & 2 & -4 \\
\hline
 & 3 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
-1 & & -3 & +2 & \\
\hline
 & 3 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

donde: $3x^3-5x^2-4x+4=(x-2)(x+1)(3x-2)$

Aplicando Ruffini para: $x^4+2x^3-3x^2-8x-4$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +2 & -3 & -8 & -4 \\
-1 & & -1 & -1 & 4 & +4 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & -4 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 2 & +4 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & +2 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

donde los factores del polinomio: $x^4+2x^3-3x^2-8x-4=(x+1)(x+2)(x-2)(x+1)=(x+1)^2(x+2)(x-2)$ reemplazando en la fracción:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x^3-5x^2-4x+4}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}=\frac{(x-2)(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{3x-2}{(x+1)(x+2)}
\end{aligned}$$

simplificando nuevamente $x=2$

$$f(2)=\frac{3(2)-2}{(2+1)((2)+2)}=\frac{1}{3}$$

24. Hallar el valor verdadero de: $f(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{4x^2+8x-5}$ para $x=\dfrac{1}{2}$.

Solución. Reemplazando $x=\frac{1}{2}$ en $f(x)$, esto es:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)+1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\right)-5}=\frac{1-2+1}{1+4-5}=\frac{0}{0}$$

transformando el numerador, tenemos:

$$\begin{aligned}4x^2-4x+1 &= (2x)^2-2(2x)(1)+1^2\\ &= (2x-1)^2\end{aligned}$$

ahora transformamos el denominador, multiplicamos y dividimos por 4:

$$\begin{aligned}\frac{(4x)^2+8(4x)-20}{4} &= \frac{(4x+10)(4x-2)}{4}\\ &= (2x+5)(2x-1)\end{aligned}$$

la fracción resultante es:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(2x-1)^2}{(2x+5)(2x-1)}\\ &= \frac{2x-1}{2x+5}\end{aligned}$$

ahora $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)+5}=\frac{0}{6}=0$. El valor verdadero de $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

25. Hallar el valor verdadero de: $f(x)=\dfrac{9x^3+3x^2+3x+1}{27x^3+1}$ para $x=-\frac{1}{3}$

Solución. Para $f\left(-\frac{1}{3}\right)$,

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{9\left(-\frac{1}{3}\right)^3+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{27\left(-\frac{1}{3}\right)^3+1}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1+1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

factorizando el numerador:

$$\begin{aligned}9x^3+3x^2+3x+1 &= 3x^2(3x+1)+(3x+1)\\ &= (3x+1)\left(3x^2+1\right)\end{aligned}$$

factorizando el denominador:

$$\begin{aligned} 27x^3+1 &= (3x)^3+1^3 \\ &= (3x+1)\left(9x^2-3x+1\right) \end{aligned}$$

ahora

$$f(x)=\frac{(3x+1)\left(3x^2+1\right)}{(3x+1)\left(9x^2-3x+1\right)}=\frac{3x^2+1}{9x^2-3x+1}$$

reemplazando $f\left(-\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1}{9\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(-\frac{1}{3}\right)+1}=\frac{\frac{1}{3}+1}{1+1+1}=\frac{4}{9}$$

26. Hallar el valor verdadero de: $f(x)=\left(x^2+3x-10\right)\left(1+\frac{1}{x-2}\right)$ para $x=2$.

Solución. Reemplazando $f(2)$:

$$f(x)=\left((2)^2+3(2)-10\right)\left(1+\frac{1}{(2)-2}\right)=\frac{0}{0}$$

transformando:

$$\begin{aligned} \left(x^2+3x-10\right)\left(1+\frac{1}{x-2}\right) &= (x+5)(x-2)\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \\ &= (x+5)(x-1) \end{aligned}$$

nuevamente para $f(2)=(2+5)(2-1)=10$.

Capítulo 9

RADICALES

9.1. RADICALES HOMOGENEOS

Son aquellos que tienen iguales sus índices.

Ejemplos:

$$a\sqrt[n]{b} \quad ; \quad p\sqrt[n]{p^2r} \quad ; \quad \sqrt[n]{r^5s}$$

en caso de que los índices no son iguales se procede a la *Homogenización*, esto es hallando el $m.c.m.$ de los índices originales, luego cada cantidad subradical se eleva a un exponente que resulta de dividir el índice común entre su índice original.

Ejemplo: Homogenizar:

$$x\sqrt[4]{x^2y}; \sqrt[3]{xy}$$

Primero se halla el $m.c.m.(3,4) = 12$. Luego elevamos las cantidades subradicales a la fracción entre el índice común y su índice original

$$x\sqrt[12]{(x^2y)^{\frac{12}{4}}}; \sqrt[12]{(xy)^{\frac{12}{3}}}$$

simplificando

$$x\sqrt[12]{x^6y^3}; \sqrt[12]{x^4y^4}$$

9.2. RADICALES SEMEJANTES

Son aquellos que tienen igual índice e igual cantidad subradical.

Ejemplo:

$$3x\sqrt[a]{xy} \quad ; \quad 4y\sqrt[a]{xy} \quad ; \quad 5z\sqrt[a]{xy}$$

9.2.1. PROPIEDADES DE LOS RADICALES

1. $\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[n \cdot r]{A^{m \cdot r}}$.

2. Suma o resta de radicales: $a\sqrt[n]{A^m} \pm b\sqrt[n]{A^m} = (a \pm b)\sqrt[n]{A^m}$ (Nota. Los radicales deben ser semejantes).
3. Multiplicación: $a\sqrt[p]{A^n} \times b\sqrt[q]{B^m} = ab\sqrt[pq]{A^n B^m}$.
4. División: $\dfrac{a\sqrt[p]{A^n}}{b\sqrt[q]{B^m}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[pq]{\dfrac{A^{nq}}{B^{mp}}}$

9.2.2. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dada la expresión: $\sqrt{a^2+\sqrt{b}} = a+b$. Determinar el valor de verdad de las afirmaciones:

   a) No existen números enteros que satisfagan la expresión.
   b) Si $b \in \langle 0;1\rangle$, entonces $a < 0$.
   c) Si $b \neq 0$, entonces $a = \dfrac{\sqrt{b}}{2b} - \dfrac{b}{2}$.
   A) FVV B) FFV C) FFF D) VVV E) VFV

   Solución. Resolviendo

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+\sqrt{b}} &= a+b\\ \left(\sqrt{a^2+\sqrt{b}}\right)^2 &= (a+b)^2\\ a^2+\sqrt{b} &= a^2+2ab+b^2\\ a &= \frac{\sqrt{b}-b^2}{2b}\end{aligned}$$

   Analizando:
   (a) Falto: $b = 1 \Rightarrow a = 0$, si $\exists a, b \in Z$
   (b) Falso: Si $b = \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{8} > 0$.
   (c) Verdadero: $a = \dfrac{\sqrt{b}}{2b} - \dfrac{b}{2}$ para $b \neq 0$

2. Efectuar

$$E = \sqrt[3]{(2x+3y+z-2t)^3 - 9y(2x+z-2t)(2x+3y+z-2t) - (2x+z-2t)^3}$$

   A) $3x$ B) $3y$ C) $3z$ D) y E) z.

   Solución. Analizando un poco hacemos el siguiente cambio de variables $u = 2x+z-2t$, reemplazando

$$\begin{aligned}E &= \sqrt[3]{(u+3y)^3 - 9yu(u+3y) - u^3}\\ &= \sqrt[3]{u^3+9u^2y+27u\,y^2+27y^3-9u^2y-27u\,y^2-u^3}\end{aligned}$$

simplificando:

$$\boxed{E = 3y}$$

3. El valor simplificado de la siguiente expresión

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{2^n \cdot 4}}}$$

(n es un número entero).

A) 3 B) 9 C) 1 D) 2 E) Ninguno.

Solución. Efectuando operaciones

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{2^n \cdot 4}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{2^n 2^2}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{2^{n+2}}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2}} = \sqrt[n]{2^{n+1-1}} = \sqrt[n]{2^n}$$

de donde

$$\boxed{E = 2}$$

4. La suma de los términos de la siguiente expresión:

$$6\sqrt{\frac{8a^3}{3}} - 2\sqrt{24ab^2} + a\sqrt{54a}$$

es igual a:

A) $2(a-b)\sqrt{a}$ B) $(a+b)\sqrt{3a}$ C) $(2a-3b)\sqrt{a}$ D) $(7a-4b)\sqrt{6a}$
E) Ninguno

5. Demostrar que:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} &= \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

6. Descomponer en radicales simples: $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

A) $3 - \sqrt{2}$ B) $3 + \sqrt{2}$ C) $2 + \sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) Ninguno

7. Expresar la suma $\sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

A) $\sqrt{3 - 2\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ C) $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$ D) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ E) $\sqrt{3 + 3\sqrt{5}}$

8. Hallar el valor de E:

$$E = \left(\sqrt[m]{\sqrt{2} - 1}\right)\left(\sqrt[2m]{\sqrt{2} + 1}\right)\left(\sqrt[4m]{\sqrt{2} + 1}\right)\left(\sqrt[8m]{3 + \sqrt{8}}\right)$$

A) -1 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $-\sqrt{2}$ E) Ninguno

9. Hallar el valor de R:

$$R = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \times \sqrt[8]{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1} \times \sqrt[12]{5\sqrt{2}-7}}$$

A) -5 B) 5 C) 1 D) 2 E) Ninguno

10. Hallar el valor de: $E = \dfrac{\left(\sqrt[5]{25}\right)^3 \left(\sqrt[15]{5}\right)\left(\sqrt[3]{25}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[5]{125}\right)}$

A) 25 B) 5 C) $\sqrt[3]{5}$ D) $\sqrt[5]{5}$ E) Ninguno

11. Hallar el valor numérico de $E = x^2 + 2$, para

$$x = \sqrt{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

A) 2 B) -2 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) Ninguno

12. Simplificar:

$$\frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(6+\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(6-\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

A) $\dfrac{3}{13}$ B) $\dfrac{5}{13}$ C) $\dfrac{7}{13}$ D) $\dfrac{9}{13}$ E) Ninguno

13. Hallar el valor de E:

$$E = \frac{\sqrt{26+\sqrt{675}} - \sqrt{26-\sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}}$$

A) $\dfrac{1}{4}\sqrt{2}$ B) $\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ C) $\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$ D) $\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ E) Ninguno

14. Luego de simplificar la siguiente fracción:

$$\frac{\sqrt{2}b\left(\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}\right)}{\sqrt{(a+b)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)} - \sqrt{(a-b)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}}$$

se reduce a:

A) $\dfrac{1}{a^2+b^2}$ B) a^2-b^2 C) $\sqrt{a^2-b^2}$ D) $\sqrt{2a}$ E) Ninguno

15. Una vez simplificada la siguiente fracción:

$$\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}} - (x-y)^{\frac{3}{2}}}{\left(2x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)}$$

se reduce a:

A) $2\sqrt{2}$ B) 1 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) Ninguno

16. Simplificar: $y = \sqrt[a-b]{\dfrac{a^{a-b}+b^{a-b}}{a^{b-a}+b^{b-a}}}$.

A) $a+b$ B) $a-b$ C) ab D) $\dfrac{a}{b}$ E) Ninguno

Solución. Transformando a potencias

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[a-b]{\frac{a^{a-b}+b^{a-b}}{a^{b-a}+b^{b-a}}} = \left(\frac{\frac{a^a}{a^b}+\frac{b^a}{b^b}}{\frac{a^b}{a^a}+\frac{b^b}{b^a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \\ &= \left(\frac{\frac{a^ab^b+a^bb^a}{a^bb^b}}{\frac{a^bb^a+a^ab^b}{a^ab^a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} = \left[\frac{(ab)^a}{(ab)^b}\right]^{\frac{1}{a-b}} \\ &= \left[(ab)^{a-b}\right]^{\frac{1}{a-b}} \end{aligned}$$

simplificando:

$$y = ab$$

17. La suma de los términos de la siguiente expresión es igual a:

$$6\sqrt{\frac{8a^3}{3}} - 2\sqrt{24ab^2} + a\sqrt{54a}$$

A) $2(a-b)\sqrt{a}$ B) $(a+b)\sqrt{3a}$ C) $(2a-3b)\sqrt{a}$ D) $(7a-4b)\sqrt{6a}$ E) Ninguno

18. Efectuar:

$$E = \sqrt[2n]{b^{2n}+\sqrt{b^{2n+1}-a^{2n}}}\,\sqrt[2n]{b^{2n}-\sqrt{b^{2n+1}-a^{2n}}}$$

Solución. Vemos que los índices de los dos radicales son iguales, entonces:

$$E = \sqrt[2n]{\left(b^{2n}+\sqrt{b^{2n+1}-a^{2n}}\right)\left(b^{2n}-\sqrt{b^{2n+1}-a^{2n}}\right)}$$

recordemos que $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ (diferencia de cuadrados)

$$\begin{aligned} E &= \sqrt[2n]{\left(b^{2n}\right)^2-\left(\sqrt{b^{2n+1}-a^{2n}}\right)^2} \\ E &= \sqrt[2n]{b^{4n}-b^{2n+1}+a^{2n}} \end{aligned}$$

Capítulo 10

RACIONALIZACION

Es la operación que consiste en transformar un denominador irracional en otro equivalente que sea racional. Es decir que no tenga raíces.

Fracción irracional, se llama así a un quebrado en cuyo denominador está presente una raíz.

Se presentan los siguientes casos:

1. Cuando el denominador irracional es un monomio.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$$

2. Cuando el denominador presenta como $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, la fracción se multiplica o divide por la conjugada de este.

3. Cuando el denominador irracional es un binomio o un trinomio cuyos radicales son de tercer orden de la forma:

$$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$$

4. Cuando el denominador es un binomio o polinomio cuyos radicales tienen índices iguales pero mayores que 3, de las formas:

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

o

$$\sqrt[n]{a^{n-1}} \mp \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} \mp \sqrt[n]{a^{n-4}b^3} + \cdots \mp \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

En este caso se debe recordar que:

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a + b$$

Para valor de n impar:

$$\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

10.0.3. EJERCICIOS PROPUESTOS

Racionalizar:

1. Racionalizar, simplificar y hallar el valor de la siguiente expresión:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) -2 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) Ninguno

2. Racionalizar, simplificar y luego halle el valor de la expresión cuando $x = -1$.

$$E = \frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2+8}+3x}$$

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) Ninguno

3. Racionalizar, simplificar y hallar el valor de la expresión: $E = \dfrac{x^3-27}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$; para $x = 3$.

A) 24 B) 32 C) 54 D) 44 E) Ninguno

4. Simplificar la expresión: $E = \dfrac{\sqrt[5]{a^2}+2\sqrt[5]{a}+1}{\left(\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a}+1\right)\left(\sqrt[5]{a^3}-\sqrt[5]{a^2}+1\right)-a} - \sqrt[5]{a}+1$

A) 2 B) 1 C) 3 D) -2 E) Ninguno

5. Racionalizar y luego simplificar: $E = \dfrac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{x\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}+1}$

A) $2+\sqrt[3]{x}$ B) $\sqrt[3]{x}+1$ C) $\sqrt[3]{x}-1$ D) $x+1$ E) Ninguno

6. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[7]{c^4}}$

7. $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

8. $\dfrac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

9. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9+2\sqrt{18}}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{8+2\sqrt{12}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$

10. $\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

11. $\dfrac{48}{\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{35}-\sqrt[3]{5}}$

12. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-2}$

13. $\dfrac{14}{\sqrt[5]{10}-\sqrt[5]{3}}$

14. $\dfrac{N}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$

15. $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$

16. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$

17. Racionalizar la siguiente expresión:

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}$$

A) $x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}$ B) $x\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y^2}$ C) $x\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}$ D) $x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y^2}$ E) Ninguno

18. Luego de simplificar la siguiente fracción se reduce a:

$$\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}\right)}{\sqrt{(a+b)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{(a-b)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}\right)}}$$

A) $\dfrac{1}{a^2+b^2}$ B) a^2-b^2 C) $\sqrt{a^2-b^2}$ D) $\sqrt{2a}$ E) Ninguno

19. Una vez simplificada la siguiente expresión:

$$\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}-(x-y)^{\frac{3}{2}}}{\left(2x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)}$$

se reduce a:

A) $2\sqrt{2}$ B) 1 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) Ninguno

20. Racionalizar la siguiente expresión:

$$E=\frac{x-5}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}$$

y hallar el valor para $x=5$.

A) 3 B) -1 C) 2 D) 1 E) Ninguno

10.1. VALOR VERDADERO

1. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$, para $x = 1$.
2. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$, para $x = 9$.
3. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, para $x = 4$.
4. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$, para $x = 1$.
5. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, para $x = a$.
6. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$, para $x = 5$.
7. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$, para $x = 2$.
8. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$, para $x = 4$.
9. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$, para $x = 7$.
10. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{2x-\sqrt{5x+6}}$, para $x = 2$.
11. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, para $x = 0$.
12. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x-2}}$, para $x = 3$.
13. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{2x-6}-\sqrt{x-1}}$, para $x = 5$.
14. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{1-\sqrt[3]{x-3}}{4-x}$, para $x = 4$.
15. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+7}-3}{x-4}$, para $x = 4$.
16. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}{x-4}$, para $x = 4$.
17. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}$, para $x = 1$.

18. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{1+x}}{x}$, para $x = 0$.

19. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2}$, para $x = 8$.

20. El valor verdadero de la fracción $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x-a}$, para $x = a$.

Capítulo 11

ECUACIONES

11.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

11.1.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones

1. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$. Sol. -3.
2. $15x-10=6x-(x+2)+(-x+3)$. Sol. 1.
3. $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x-6)$. Sol. $-\frac{9}{2}$.
4. $30x-(-x+6)+(-5x+4)=-(5x+6)+(-8+3x)$. Sol. $-\frac{3}{7}$.
5. $3x+[3x-(6-9x)]=30x+[-(3x+2)-(x+3)]$. Sol. $\frac{1}{2}$.

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias

1. $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2}$. Sol. $-\frac{2}{19}$.
2. $x-\frac{5x-1}{3}=4x-\frac{3}{5}$. Sol. $\frac{1}{5}$.
3. $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$. Sol. -4.
4. $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0$. Sol. 3.
5. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$. Sol. -8.
6. $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$. Sol. -13.

7. $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{5} + 2x = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3x}{20}$. Sol. $\dfrac{1}{2}$.

8. $\dfrac{1+2x}{1+3x} - \dfrac{1-2x}{1-3x} = -\dfrac{3x-14}{1-9x^2}$. Sol. 14.

9. $\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12} = \dfrac{1}{2x+6} + \dfrac{7}{6x+24}$. Sol. $4\frac{7}{8}$.

10. $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{2x-2} = -\dfrac{-3}{2x+2}$. Sol. 2.

11. $\dfrac{5x+13}{15} - \dfrac{4x+5}{5x-15} = \dfrac{x}{3}$. Sol. 54.

12. $\dfrac{2x-1}{2x+1} - \dfrac{x-4}{3x-2} = \dfrac{2}{3}$. Sol. -11.

13. La solución de la ecuación: $\dfrac{x+a+b}{x+a} = \dfrac{x+a-b}{x-a} - \dfrac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$, es:

    A) $x = a+b$ B) $x = a-b$ C) $x = \dfrac{a+b}{2}$ D) $x - \dfrac{a+b}{2}$ E) Ninguno

14. Hallar la solución de la ecuación literal fraccionaria

$$\frac{2(a+x)}{b} - \frac{3(b+x)}{a} = \frac{6\left(a^2-2b^2\right)}{ab}$$

    A) $3(a-b)$ B) $2a+3b$ C) $3(a+b)$ D) $2a-3b$ E) Ninguno

11.2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $25x^2 - 169 = 0$. Sol. $\pm\dfrac{13}{5}$.

2. $16x^2 - 121 = 0$. Sol. $\pm 2\dfrac{3}{4}$.

3. $(2a-5)(2a+5) - 135 = 0$. Sol. $\pm 2\sqrt{10}$.

4. $(x-4)^2 = 3\left(x^2-4\right) - 8x$. Sol. $\pm\sqrt{14}$.

5. $\dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x^2+7x+2}{x^2-4}$. Sol. $\pm\sqrt{2}$.

6. $x - \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{5}{x+1} - 1$. Sol. ± 2.

7. $\dfrac{14z^2-1}{15} = \dfrac{z^2}{3} - \dfrac{5}{3} + \dfrac{4z^2-1}{5}$. Sol. ± 3.

8. $\dfrac{y-2}{x+2} - \dfrac{y+2}{2-y} = \dfrac{40}{y^2-4}$. Sol. ± 4.

9. $\dfrac{2y^2-1}{y-3} = y + 3 + \dfrac{17}{y-3}$. Sol. ± 3.

10. $\dfrac{1}{6v^2} - \dfrac{5}{2v^2} = -\dfrac{7}{12}$. Sol. ± 2.

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $(2x+3)^2 = 9$. Sol. $(0; -3)$.

2. $\dfrac{1}{2}x^2 + 0{,}75x = 0$. Sol. $\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$.

3. $(x+3)^2 = (x+5)^2 - (x+4)^2$. Sol. $(0; -4)$.

4. $(x-12)^2 + (x-5)^2 = (x-13)^2$. Sol. $(0; 8)$.

5. $\dfrac{x(x+3)}{x^2-1} - \dfrac{5x}{x+1} = \dfrac{x}{x-1}$. Sol. $\left(0; \dfrac{7}{5}\right)$.

6. $\dfrac{2}{x+2} = \dfrac{5x}{2x+4} - \dfrac{x-4}{x^2+4x+4}$. Sol. $\left(0; -\dfrac{4}{5}\right)$.

7. $\dfrac{2x+3}{x-5} = \dfrac{x-3}{x+5}$. Sol. $(0; -21)$.

8. $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{5x^2}{4}$. Sol. $\left(0; \dfrac{10}{3}\right)$.

9. $\dfrac{2mx-1}{2} + \dfrac{3mnx^2+2}{3} = \dfrac{1}{6}$. Sol. $\left(0; -\dfrac{m}{n}\right)$.

10. $3x - 1 = \dfrac{5x+2}{x-2}$. Sol. $(0; 4)$.

Resolver las siguientes ecuaciones por descomposición factorial

1. $x^2 - x - 30 = 0$. Sol. $(6; -5)$.

2. $x^2 + 4x - 21 = 0$. Sol. $(-7, 3)$.

3. $x^2 - 7x - 8 = 0$. Sol. $(-8, 1)$.

4. $x^2 + 17x + 60 = 0$. Sol. $(12; -5)$.

5. $x^2 - 30x - 675 = 0$. Sol. $(45; -15)$.

6. $8x - 65 = -x^2$. Sol. $(-13, 5)$.

7. $9x^2 = 9x - 2$. Sol. $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

8. $20x^2 - 7x - 40 = 0$. Sol. $\left(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

9. $7x = 15 - 30x^2$. Sol. $\left(-\frac{5}{6}; \frac{3}{5}\right)$.

10. $\dfrac{3x-1}{x} = \dfrac{7}{6} + \dfrac{2x}{2x-1}$. Sol. $\left(2; \dfrac{3}{10}\right)$.

11. Si α y β son raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, entonces $\alpha^2 + \beta^2$ vale:

    A) $p^2 - 2q$ B) $4p^2 + 2q$ C) $p^2 + 2q$ D) $p^2 + 4q$ E) Ninguno

    Solución. Por la fórmula de la ecuación de segundo grado:

    $$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

    las soluciones son: $\alpha = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ y $\beta = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, si sumamos ambas soluciones

    $$\alpha + \beta = p$$

    elevando al cuadrado ambos miembros

    $$\begin{aligned} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &= p^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= p^2 - 2\alpha\beta \end{aligned}$$

    de las soluciones del problema si multiplicamos $\alpha\beta = q$, entonces

    $$\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$$

12. Resolver: $(y-9)(y-7)(y-5)(y-1) = (y-2)(y-4)(y-6)(y-10)$.

    Solución. Ordenando

    $$\begin{aligned} (y-9)(y-5)(y-7)(y-1) &= (y-2)(y-6)(y-4)(y-10) \\ \left(y^2 - 14y + 45\right)\left(y^2 - 8y + 7\right) &= \left(y^2 - 8y + 12\right)\left(y^2 - 14y + 40\right) \end{aligned}$$

    Si $u = y^2 - 14y$ y $v = y^2 - 8y$, entonces

    $$\begin{aligned} (u+45)(v+7) &= (v+12)(u+40) \\ uv + 7u + 45v + 315 &= uv + 12u + 40v + 480 \\ v - u &= 33 \end{aligned}$$

    reemplazando

    $$\left(y^2 - 8y\right) - \left(y^2 - 14y\right) = 33$$

    simplificando:

    $$y = \frac{11}{2}$$

13. Hallar la suma de las raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{2x-b}{b}-\frac{x}{x+b}=\frac{2x}{4b}$$

A) $\frac{1-2a}{a^2}$ B) $\frac{1+2a}{a^2}$ C) $\frac{1-2a^2}{a}$ D) $\frac{1+2a^2}{a}$ E) Ninguno

14. Hallar el producto de los valores de m que hacen que la ecuación: $2x^2 - mx + m - 2 = 0$ tengan raíces iguales.

A) 8 B) -8 C) 16 D) -16 E) Ninguno

15. Hallar el valor de n para que las raíces de la ecuación: $\frac{x^2+3x}{5x+2}=\frac{n-1}{n+1}$ sean opuestas.

A) 7 B) 1 C) 4 D) 5 E) Ninguno

16. Si las raíces de la ecuación: $4x^2 - 2mx + m - 5x - 1 = 0$ satisfacen: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{5}$, determine el valor de m.

A) 4 B) -4 C) 3 D) -3 E) Ninguno

17. Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación: $4x^2 + x + 2 = 0$, encontrar el valor de $E=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

A) $-\frac{15}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{2}{15}$ D) $-\frac{2}{15}$ E) Ninguno

18. Una raíz de la ecuación $2x^2 + kx + 20 = 0$ es 4. Hallar k.

A) 13 B) 14 C) -13 D) -14 E) Ninguno

19. Si las raíces de la ecuación: $x^2 - ax + a = 0$ son iguales y distintas de cero, entonces una raíz de la ecuación: $x^2 - 2ax + 15 = 0$ es:

A) 5 B) 6 C) 4 D) 2 E) Ninguno

20. Resolver: $x - \sqrt{x^2-8} = 4$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguno

21. Resolver: $\frac{x^2-6x+10}{x^2+8x+17}=\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^2$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) Ninguno

22. Resolver: $\sqrt{x+11+5\sqrt{2x-3}}+\sqrt{x+3+3\sqrt{2x-3}}=9\sqrt{2}$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) Ninguno

23. Resolver: $\dfrac{\sqrt[n]{2+x}}{2} = \sqrt[n]{2x} - \dfrac{\sqrt[n]{2+x}}{x}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguno

24. Resolver: $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} + \dfrac{x^2+8x+20}{x+4} = \dfrac{x^2+4x+6}{x+2} + \dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $-\dfrac{5}{2}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) $-\dfrac{1}{5}$ E) Ninguno

25. Resolver la siguiente ecuación, sabiendo que $a^2 - b^2 \neq 0$:

$$\frac{\left[\left(a^2-b^2\right)^2 - a^2b^2\right]\left(a^2-b^2\right)}{b^6-a^6} = \frac{b^2\left(x-a\right) - a^2\left(x-a\right)}{\left(a+1\right)b^2 - \left(a^2+a\right)\left(a+b\right) + \left(a+1\right)ab}$$

El resultado es:

A) -1 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) Ninguno

26. Resolver:

$$\frac{2-x}{3} + \frac{3-x}{4} + \frac{3}{4} = \frac{x-4}{5} \cdot \frac{x-5}{6}$$

A) -4 B) 8 C) -8 D) 4 E) 12

27. Despeje x de:

$$\frac{2x+a}{b} - \frac{b-x}{a} = \frac{3ax + (a-b)^2}{ab}$$

A) b B) a C) ab D) $2a$ E) $2b$.

28. Resolver:

$$\frac{3}{3+\dfrac{3}{x+\dfrac{3}{4}}} = \frac{3}{3+\dfrac{3}{x+\dfrac{3}{5}}}$$

A) 1 B) $-\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) 0 E) $\nexists x$.

29. Si la ecuación

$$\frac{a}{b}\left(x-a\right) = \frac{b}{a}\left(x-b\right)$$

es imcompatible, es correcto que:

A) $2a - b = 0$ B) $a - b = 0$ C) $a + b = 0$ D) $a^2 - 3b = 0$ E) $a + 2b = 0$.

30. Resolver:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{5x-4} + \sqrt{4x-3}$$

indicando luego la naturaleza de la raíz:

A) Primo B) Par C) Irracional D) Impar E) Fracción.

31. Resolver para x:

$$\frac{ax-1}{a}+\frac{bx-1}{b}=(2-a-b)\,x$$

A) $a+b$ B) ab C) $\frac{1}{ab}$ D) $a+b-2$ E) $a-b$.

32. ¿Para qué valor del parámetro n la ecuación en x:

$$8nx+2n-9=nx+2\,(x+n+7)$$

será incompatible?

A) $\frac{7}{2}$ B) $-\frac{7}{2}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $-\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{7}$.

33. Resolver la ecuación

$$\frac{(a+b)}{a-b}x+\frac{a}{a+b}x-\frac{a-b}{a+b}=\frac{a}{a-b}x+\frac{a+b}{a^2-b^2}$$

A) $2b$ B) $2a$ C) 2 D) $2a+2b$ E) $a+b$.

34. Resolver la ecuación

$$\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}=3\sqrt{a+b-2x}$$

A) a B) 1 C) $2a$ D) $3a$ E) $2b$.

35. Si una de las raíces de la ecuación $x^2+ax+b=0$, es cuadrado de la otra el valor de E:

$$E=\frac{a^3+b^3}{b\,(3a-1)}$$

es:

A) a B) b C) $\frac{a}{b}$ D) 1 E) Ninguno

Solución. Del enunciado del ejercicio $x_1=x_2^2$

36. Luego de resolver la ecuación $x^2-4xy+5y^2=3\,(2x-3)$. Calcular el valor de $x+y$.

A) 7 B) 5 C) 11 D) 9 E) Ninguno

Solución. Simplificando la ecuación:

$$x^2-4xy+5y^2=3\,(2x-3)$$

11.2.1. PROPIEDADES DE LAS RAICES

Para un mejor estudio de las propiedades de las raícees de una ecuación de segundo grado, consideremos los siguientes casos:

Suma de las raíces. Las raíces de la ecuación completa general $ax^2+bc+c=0$, viene dada por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

si sumamos ambas raíces

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

simplificando

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

La diferencia de las raíces. Si restamos las raíces:

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

simplificando:

$$x_1-x_2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

Producto de las raíces. De las raíces de la ecuación general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

si multiplicamos ambas raíces

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

simplificando:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

11.2.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la suma de los cuadrados de las dos raíces de la ecuación: $x^2+x+k=0$, es igual a 9. Determinar el valor de k.

   A) -6 B) -4 C) 6 D) 5 E) Ninguno

   Solución. La condición del problema nos dice:

$$x_1^2+x_2^2=9$$

   sumando a ambos miembros $2x_1x_2$

$$\begin{aligned} x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 &= 9+2s_1x_2 \\ (x_1+x_2)^2 &= 9+2x_1x_2 \end{aligned}$$

   de las propiedades de las raíces: $x_1+x_2=-1$ y $x_1x_2=k$, reemplazando:

$$1=9+2(k)$$

   despejando $k=-4$. La ecuación de segundo grado es: $x^2+x-4=0$

2. Hallar el valor de n para que la suma de las raíces de la siguiente ecuación sea igual a cero:

$$\frac{x^2+3x}{5x+2}=\frac{n-1}{n+1}$$

   A) 7 B) 1 C) 4 D) 5 E) Ninguno

   Solución.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x}{5x+2} &= \frac{n-1}{n+1} \\ \left(x^2+3x\right)(n+1) &= (n-1)(5x+2) \\ (n+1)x^2+3(n+1)x &= 5(n-1)x+2(n-1) \\ (n+1)x^2+(8-2n)x-2(n-1) &= 0 \end{aligned}$$

   la condición del problema es $x_1+x_2=0=-\frac{b}{a}$, de donde $(8-2n)=0$, despejando $n=4$. La ecución de segundo grado es:

$$5x^2-6=0$$

3. Hallar el valor de m si en la ecuación $x^2-4x+5m=mx+8$ la suma de sus raíces es igual al triple del producto de las raíces de la ecuación.

   A) 3 B) 5 C) 2 D) 10 E) Ninguno

   Solución. La ecuación $x^2-(4+m)x-8=0$. La condición del ejercicio nos dice:

$$x_1+x_2=3x_1x_2$$

donde $x_1 + x_2 = 4 + m$ y $x_1 x_2 = -8$, reemplazando en la condición:

$$4 + m = 3(-8)$$

despejando $m = -20$, la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 16x - 8 = 0$$

4. Determinar una solución de la ecuación $3x^2 - (2k - 3)x + (k - 5) = 0$, si el producto de sus raíces es el cuádruplo de la suma de las raíces.

   A) 1 B) 4 C) -2 D) 3 E) Ninguno

   Solución. La condición del ejercicio nos dice:

$$x_1 x_2 = 4(x_1 + x_2)$$

   donde $x_1 x_2 = \dfrac{k-5}{3}$ y $x_1 + x_2 = \dfrac{2k-3}{3}$, reemplazando en la condición:

$$\frac{k-5}{3} = 4\left(\frac{2k-3}{3}\right)$$

   despejando $k = 1$, la ecuación de segundo grado es:

$$3x^2 + x - 6 = 0$$

5. Si la diferencia entre las raíces de la sigiente ecuación:

$$x^2 - 3kx + 2k + 1 = 0$$

   es igual a 4, determinar el valor de k.

   A) 2 B) -7 C) 5 D) 8 E) Ninguno

   Solución. La diferencia de las raíces $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$, es:

$$\begin{aligned} \sqrt{9k^2 - 4(2k+1)} &= 4 \\ 9k^2 - 8k - 20 &= 0 \end{aligned}$$

   resolviendo la ecuación, tenemos que $k_1 = -\dfrac{10}{9}$ o $k_2 = 2$.

6. Qué cantidad es necesario aumentar a las raíces de la ecuación:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x^2 + 2(a+b)x + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

   Para que las cantidades resultantes sean iguales en magnitud pero de signos opuestos.

A) $\dfrac{a-b}{ab}$ B) $\dfrac{ab}{a-b}$ C) $\dfrac{a+b}{ab}$ D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{b-a}{ab}$

Solución. De la suma de raíces de la ecuación de segundo grado: $Ax^2 + Bx + C = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

La condición del problema nos dice qe al suma una cantidad n a cada raíz de la ecuación, entonces estas son iguales en magnitud; pero de signos opuestos, es decir:

$$\begin{aligned}
x_1 + n &= -(x_2 + n) \\
-2n &= x_1 + x_2 \\
-2n &= -\frac{B}{A} \\
&= \frac{(a+b)}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}
\end{aligned}$$

simplificando y despejando n:

$$n = \frac{ab}{a-b}$$

7. Una solución de la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{1+x}} + \sqrt{1+x} = -\sqrt{2}$$

es:

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) Ninguno

Solución. Racionalizando la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{1+x}} + \sqrt{1+x} &= -\sqrt{2} \\
\frac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{1+x}\right)^2} + \sqrt{1+x} &= -\sqrt{2} \\
\frac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{x - 1 - x} + \sqrt{1+x} &= -\sqrt{2} \\
-\sqrt{x} - \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x} &= -\sqrt{2} \\
\sqrt{x} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{x = 2}$$

8. Si α, β son raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, entonces $\alpha^2 + \beta^2$ vale:

A) $p^2 - 2q$ B) $4p^2 + 2q$ C) $p^2 + 2q$ D) $p^2 + 4q$ E) Ninguno.

Solución. Las soluciones de la ecuación:

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ \beta &= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{aligned}$$

elevando al cuadrado y sumando

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)^2 + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[p^2 + 2p\sqrt{p^2 - 4q} + \left(p^2 - 4q\right) + p^2 - 2p\sqrt{p^2 - 4q} + \left(p^2 - 4q\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(4p^2 - 8q\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q}$$

9. Qué cantidad es necesario aumentar a la raíces de la ecuación

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) x^2 + 2\left(a + b\right) x + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

Para que las cantidades resultantes sean iguales en mangitud pero se signos opuestos.

A) $\frac{a-b}{ab}$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$ D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\frac{b-a}{ab}$

Solución. La condición del problema nos dice que al suma una cantidad n a cada raíz de la ecuación, entonces estos son iguales en magnitud; pero de signos opuestos, es decir:

$$\begin{aligned} x_1 + n &= -\left(x_1 + n\right) \\ -2n &= x_1 + x_2 \\ 2n &= \frac{2\left(a + b\right)}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \\ n &= \frac{ab}{a - b} \end{aligned}$$

10. Sea la ecuación $4x^2-2x+3=0$, cuyas raíces son a y b. Halle otra ecuación cuadrática que tenga por raíces $(2a-1)$ y $(2b-1)$.

    A) y^2-y+1 B) $y^2-\frac{1}{2}y-2=0$ C) $y^2-y-2=0$ D) $y^2-\frac{1}{4}y+3=0$ E) $y^2+2y+3=0$.

    Solución. Se da la ecuación:

    $$4x^2-2x+3=0$$

    donde a y b son las raíces. El teorema de Cardamo: Si $ax^2+bx+c=0$, donde $a\neq 0$ y x_1, x_2 sus raíces, entonces:

    $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

    aplicando las raíces a la ecuación

    $$a+b=\frac{-(-2)}{4}=\frac{1}{2}$$

    y

    $$a\cdot b=\frac{3}{4}$$

    La ecuación cuadrática cuyas raíces son $(2a-1)$ y $(2b-1)$:

    $$\begin{aligned} (y-(2a-1))(y-(2b-1)) &= 0 \\ (y-2a+1)(y-2b+1) &= 0 \\ y^2-2y\left[(a+b)-1\right]+4(ab)-2(a+b)+1 &= 0 \end{aligned}$$

    reemplazando $a+b=\frac{1}{2}$ y $ab=\frac{3}{4}$, tenemos

    $$y^2-2y\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+4\left(\frac{3}{4}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$$

    simplificando

    $$y^2+2y+3=0$$

11. La siguiente ecuación tiene la diferencia de las raíces igual a la mitad de su producto, el valor de k es:

    $$kx^2-(1+k)x+3k+2=0$$

12. Sea las ecuaciones $x^2+ax+b=0$ y $x^2+mx+n=0$. Si ambas admiten una raíz común, determinar la ecuación cuyas raíces son las soluciones distintas de las ecuaciones dadas. Dar el término independiente.

A) $bn\,(m-a)$ B) $bn\,(m-a)^2$ C) $b\,(m-a)$ D) $b\,(m-a)^2$ E) Ninguno.

Solución. Sea x_1 la raíz común y x_2, x_3 las raíces no comunes. De $x^2+ax+b=0$,

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a & (1) \\ x_1x_2=b & (2) \end{cases}$$

De $x^2+mx+n=0$

$$\begin{cases} x_1+x_3=-m & (3) \\ x_1x_3=n & (4) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $(2)\div(3)$: $x_2=\frac{b}{n}x_3$ (5) y $(1)-(3)$: $x_2-x_3=-a+m$ (6). (5) en (6):

$$\begin{aligned} \frac{b}{n}x_3-x_3 &= -a+m \\ x_3 &= \frac{m-a}{b-n}n \end{aligned}$$

reemplazando en (5):

$$x_2=\frac{m-a}{b-n}b$$

La ecuación cuyas soluciones son las raíces distintas, es:

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{m-a}{b-n}n\right)\left(x-\frac{m-a}{b-n}b\right) &= 0 \\ x^2-2\left(\frac{m-a}{b-n}\right)x+\left(\frac{m-a}{b-n}\right)^2bn &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando por $(b-n)^2$

$$(b-n)^2x^2-2\,(m-a)\,(b-n)\,x+(m-a)^2\,bn=0$$

donde, el término independiente:

$$(m-a)^2\,bn$$

13. Determinar el valor de m, si las raíces de la ecuación:

$$x^2-(m+3)\,x+\frac{m^2}{4}+1=0$$

se diferencian en 2 unidades.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{5}{6}$ E) Ninguno

14. En la siguiente ecuación $x^2 - nx + 1 = 0$, y sabiendo que la suma de los cubos de las raíces es igual a 2, uno de los valores de n es:

    A) -2 B) 1 C) -1 D) 3 E) Ninguno.

15. Para que las raíces de la ecuación sean ambas cero los valores de p y q deberán ser
    $$x^2 + (2q + 3p - 1)\,x + q - p - 3 = 0$$
    A) $(2;-1)$ B) $(-1;2)$ C) $(2;3)$ D) $(-2,1)$ E) Ninguno

16. En la siguiente ecuación determinar un valor de k para que una de las raíces sea el triple de la otra:
    $$x^2 - (k + 4)\,x + 5k - 8 = 0$$
    A) 4 B) 2 C) -2 D) -4 E) Ninguno.

17. Hallar la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $(2k + 2)\,x^2 + (4 - 4k)\,x + (k - 2) = 0$, sabiendo que las raíces son recíprocas.

    A) $\frac{84}{9}$ B) $\frac{82}{9}$ C) $\frac{78}{9}$ D) $\frac{75}{9}$ E) Ninguno

18. Si una raíz de la ecuación $x^2 + kx - 2 = 0$ es 1. Calcular el valor de k y la otra raíz.

19. Dada la ecuación $2x^2 + mx + 30 = 0$ y x_1, x_2 sus raíces. ¿Para qué valores de m se cumple la relación $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}$?

    A) 16 B) 10 C) 14 D) 8 E) 20

20. Hallar el valor de k si las raíces de la ecuación de segundo grado: $x^2 + 2\,(k + 2)\,x + 9k = 0$ son iguales.

21. Al resolver un problema que se reduce a una ecuación de segundo grado, un estudiante comete un error en el término independiente de la ecuación y obtiene como raíces 8 y 2. Otro estudiante comete un error en el coeficiente del término de primer grado y obtiene como raíces -9 y -1. Hallar la ecuación correcta.

22. Calcular el valor de m para que una de las raíces de la ecuación $x^2 - (m + 4)\,x + (5m - 8) = 0$, sea el triple de la otra.

23. Calcular el valor de k en la ecuación: $x^2 - kx + 36 = 0$. Si $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$. Sol. 15

24. Calcular m para que $x_1 = x_2$ en: $x^2 - 2\,(1 + 3m)\,x + 7\,(3 + 2m) = 0$. Sol. 2 y $-\frac{10}{9}$.

25. Calcular k para que $x_1 - x_2 = 1$ en: $2x^2 - (k - 1)\,x + k + 1 = 0$. Sol. 11

26. En la siguiente ecuación: $x^2 - nx + 1 = 0$ y sabiendo que la suma de los cubos de las raíces es igual a 2, uno de los valores de n es:

    A) -2 B) 1 C) -1 D) 3 E) Ninguno.

27. Para que las raíces de la ecuación sean ambas cero los valores de p y q deberán ser:
$$x^2 + (2q + 3p - 1)\,x + q - p - 3 = 0$$

    A) $(2, -1)$ B) $(-1, 2)$ C) $(2, 3)$ D) $(-2, 1)$ E) Ninguno.

28. En la siguiente ecuación: $x^2 - px + 24 = 0$, se pide que la diferencia de los cuadrados de sus raíces sea 14 entonces p, vale:

    A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) Ninguno.

29. La siguiente ecuación tiene la diferencia de las raíces igual a la mitad de su producto, el valor de k es: $kx^2 - (1 + k)\,x + 3k + 2 = 0$.

30. Si las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 6x + a$, son reales y positivos, encontrar la suma de los posibles valores de a.

    A) 1 B) 3 C) 6 D) 10 E) Ninguno.

31. Sabiendo que para cualquier valor de x, el trinomio $x^2 + 2x + p$, es mayor que 7, p debe ser:

    A) $p > 0$ B) $p > 8$ C) $p > 7$ D) $p < 8$ E) Ninguno.

32. ¿Para qué valores de m las raíces de la ecuación
$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m - 1}{m + 1}$$
serán iguales en magnitud pero de signos contrarios. Sol. $\frac{a - b}{a + b}$.

33. Hallar la condición para que una de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ sea igual a n veces la otra. Sol. $nb^2 = (1 + n)^2\,ac$.

34. Formar la ecuación cuyas raíces sean los cuadrados de la suma y de la diferencia de las raíces de $2x^2 + 2\,(m + n)\,x + m^2 + n^2 = 0$. Sol. $x^2 - 4mnx - \left(m^2 - n^2\right) = 0$.

35. ¿Para qué valor de m la expresión $y^2 + 2xy + 2x + my - 3$ podrá descomponerse en dos factores racionales? Sol. 2.

36. Hallar el valor de m que haga que la expresión $2x^2 + mxy + 3y^2 - 5y - 2$ sea equivalente al producto de dos factores lineales. Sol. $\neq 7$.

37. Hallar el valor de k, para que la ecuación siguiente tenga raíces iguales. Además indique la suma de las raíces: $kx^2 + (5 - 3k)\,x + k = 0$. Sol. $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, 6.

38. Encuéntrese el valor de k para que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas en la ecuación: $2x^2 + (k+1)\,x + 3x - 5 = 0$. Sol. 1.

39. Encuentre el valor de k para que una de las raíces de las ecuación: $2x^2 - 3x + k - 2 = 0$, sea cero. Sol. 2

40. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + px + 3 = 0$ satisfacen la condición $x_2 = 3x_1$. Hallar p, x_1, x_2. Sol. $p = \mp 4$, $x_1 = \pm 3$ y $x_2 = \pm 1$.

41. Encuentre el valor de k en la ecuación: $2x^2 - k - 3 = -3kx + x$, de manera que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas. Sol. 2.

42. Hallar el valor de la constante en la siguiente ecuación: $3x^2 + k\,(x-2) + 1 = 0$, para que cumpla la condición que una de sus raíces sea el recíproco de la otra. Sol. -1.

43. Hallar el valor de la constante k en la ecuación: $(2k+1)\,x^2 + kx + k = 4\,(kx+2)$, si la suma de sus raíces sea igual a su producto. Sol. -4.

44. Hallar el valor de la constante k de la ecuación: $(2k+1)\,x^2 - 4kx = 1 - 3k$, para que las raíces sean iguales. Sol. -1, $\frac{1}{2}$.

45. Hallar el valor de la constante k en la ecuación: $x^2 - 3\,(x-k) - 2 = 0$. Si una raíz sea igual al doble de la otra menos 3. Sol. $\frac{4}{3}$.

46. Hallar el valor de la constante k en la ecuación: $4x^2 - 20x + k^2 - 4 = 0$, si una raíz sea gual a la otra más dos. Sol. ± 5.

47. Hallar el valor de la constante en la ecuación: $kx^2 - (1+k)\,x + 3k + 1 = 0$, si la suma de sus raíces sea igual al doble de su producto. Sol. $-\frac{1}{5}$.

48. Hallar el valor de la constante k en la ecuación: $2x^2 + (k+1)\,x + 3k - 5 = 0$, para que la suma de las raíces sea igual al doble de su producto. Sol. 1

49. Hallar el valor de la constante k en la ecuación: $3x^2 + (3k+4)\,x + k - 2 = 0$, para que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas. Sol. $-\frac{1}{2}$.

50. Hallar el valor de k para que la ecuación: $x^2 - (3k-2)\,x + \left(k^2+1\right) - 2 = 0$, una de sus raíces sea el triple de la otra. Sol. 2, $\frac{14}{11}$.

51. La siguiente ecuación: $kx^2 - (1+k)\,x + 3k + 2 = 0$, tiene la diferencia de las raíces igual a la mitad de su producto, el valor de k es. Sol. 0, $-\frac{36}{53}$.

52. Calcular el valor de k para que una de las raíces de la ecuación: $x^2 - (k+4)\,x + (5k-8) = 0$, sea el triple de la otra. Sol. $14\frac{2}{3}$, 4.

53. Si la diferencia de las raíces de la siguiente ecuación: $x^2 - 3kx + 2k + 1 = 0$, es 4, los valores de k son: Sol. 2, $-1\frac{1}{9}$

54. Si la diferencia de las raíces de la siguiente ecuación: $x^2+(2p+3q-1)\,x+p-q-3=0$. Sol. $p=2$, $q=-1$.

55. Si los cuadrados de las dos raíces de la ecuación $x^2+x+c=0$, suman 9, entonces el valor de c es: Sol. -4.

56. Determinar el valor de m, de tal manera que la ecuación de segundo grado $x^2-2\left(m^2-4m\right)x+m^4=0$, tenga sus dos raíces con un mismo valor diferente de cero. Sol. 2.

57. Si la ecuación $(9m-4)\,x^2-m\,(9m-4)\,x+m=0$ admite raíces recíprocas. Hallar el valor de m. Sol. $1\frac{1}{8}$.

58. Hallar el valor de m en la ecuación $x^2-2mx+m^2-4=0$, de modo que una de las raíces aumentado en 2 sea el triple de la otra. Sol. 5.

59. Si en la ecuación $x^2+(2k+5)\,x+k=0$, se conoce que una raíz excede a la otra en 3 unidades. Hallar el valor de k. Sol. -2.

60. Hallar el valor de k en la ecuación $kx^2-(k-5)\,x+1=0$ de manera que el producto de sus raíces es igual a la diferencia de las mismas. Sol. 12, 2.

61. Hallar una ecuación de segundo grado que tenga como raíces las soluciones inversas de la ecuación $2x^2+7x+6=0$. Sol. $6x^2+7x+2=0$.

62. Construir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean la suma y el producto de las raíces de $2x^2-3x+5=0$. Sol. $4x^2-16x+15=0$.

63. Hallar el valor de a para que las raíces de las ecuaciones $(5a-2)\,x^2-(a-1)\,x+1=0$ y $(2b+1)\,x^2-5x+3=0$ sean iguales. $4\frac{1}{3}$.

64. Si las raíces de las ecuaciones: $x^2-7x+12=0$ y $x^2-3x+q=0$ tienen una raíz común. Hallar el valor de q. Sol. 0, -4.

65. Si las ecuaciones $x^2+px+q=0$ y $x^2+rx+s=0$, tienen una raíz común. Hallar dicha raíz. Sol. $x=\dfrac{q-s}{r-p}$.

66. Construir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean la suma y el producto de las inversas de las raíces de aquella ecuación que tiene como una de sus raíces $\dfrac{3}{2}+\dfrac{i}{2}$. Sol. $25x^2-40x+12=0$.

67. Construir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean las inversas de la suma y el producto de las raíces de la ecuación $x^2-4x-3=0$. Sol. $12x^2+x-1=0$.

68. Hallar el valor de n para que una raíz de la ecuación: $(a+3)\,x^2+2nx+2n+3=0$ sea igual a la mitad del inverso de la otra. Sol. -1.

69. Si una de las raíces de la ecuación:

$$\left(4k^2-1\right)x^2+16x-4k-7=0$$

es igual al inverso negativo de la otra. Hallar el valor de k. Sol. 2.

70. Hallar el valor de k en la ecuación:

$$(2k+1)\,x^2-3kx+k-8=0$$

para que la suma de sus raíces sea igual a su producto. Sol. -4.

71. Si (x_1,x_2) es el conjunto solución $x^2-x-1=0$. Hallar el valor de:

$$F=\frac{x_1^3}{x_2^3}+\frac{x_2^3}{x_1^3}$$

Sol. -18.

72. Al resolver $(x+1)^3+(x+1)^2+3=0$ las raíces son: r_1, r_2, r_3. Hallar: $r_1^2+r_2^2+r_3^2$. Sol. $r_1^2+r_2^2+r_3^2=6$.

73. Si los cuadrados de las dos raíces reales de la ecuación: $x^2+x+c=0$ suma 9. Hallar el valor de c. Sol. -4.

74. Determinar la suma de los valores que pueda tomar m para que la ecuación $(m+1)\,x^2+mx+1=0$, tenga una sola solución si m es un número real y diferente de -1. Sol. $m_1+m_2=4$.

75. Si la ecuación $x^2-ax+36=0$, admite como raíces a: x_1 y x_2, donde $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{5}{12}$, encontrar el valor de n. Sol. 15.

76. Hallar la suma de las raíces de la ecuación $(k-2)\,x^2-(2k-1)\,x+k-1=0$, sabiendo que el discriminante es 25. $x_1+x_2=\frac{7}{2}$.

77. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación: $ax^2-(a-5)\,x+1=0$, donde: $x_1x_2=x_1-x_2$. Calcular la suma de los valores de a. Sol. 14.

78. Hallar la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

$$(2k+2)\,x^2+(4-4k)\,x+k-2=0$$

sabiendo que las raíces son recíprocas. Sol. $9\frac{1}{9}$.

79. Sea A la suma de las raíces de $ax^2+bx+c=0$ y B la suma de las raíces de $a\,(x+1)^2+b\,(x+1)+c=0$, entonces $B-A$ es. Sol. -2.

80. Una de las dos raíces de la ecuación:

$$b\,(c-a)\,x^2+a\,(b-c)\,x+c\,(a-b)=0$$

es 1, determinar la otra raíz. Sol. $\dfrac{c\,(a-b)}{b\,(c-a)}$.

81. Si θ y φ son las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x + c = 0$, entonces el valor de $\dfrac{\theta^2 + \varphi^2 + 2c}{9}$ es. Sol. 4.

82. Determinar el valor de p en la siguiente ecuación $x^2 - 6x + 4 + p = 0$, sabiendo que la diferencia de sus raíces es 2.

    A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) -5 D) 4 E) Ninguno

83. Si p y q son las raíces de la ecuación $x^2 + 2bx + c = 0$, entonces el valor de $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{q^2}$ es. Sol. $\dfrac{b^2 - c}{c^2}$.

84. Sea x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si la suma de sus cuadrados es 4 y su producto es $\dfrac{1}{2}$. Hallar: $\dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$. Sol. $5\dfrac{1}{4}$.

85. Si las ecuaciones en x: $x^2 + x + a = 0$; $x^2 + 2x + b = 0$, tiene una raíz común, calcular el valor de:

$$E = \frac{5\,(a-b)^2}{b - 2a}$$

    Sol. 5.

86. Si una de las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ es cuadrado de la otra, el valor de E es:

$$E = \frac{a^3 + b^3}{b\,(3a-1)}$$

    A) a B) b C) $\dfrac{a}{b}$ D) 1 E) Ninguno.

87. Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $x^2 - 3\left(a^3 - 3ab\right)^{\frac{1}{3}} x + \left(a^3 - 3ab\right)^{\frac{2}{3}} = 0$ y además x_3 y x_4 son raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, el valor de:

$$E = \left(x_1^3 + x_2^3\right) + \left(x_3^3 + x_4^3\right)$$

    es:

    A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) Ninguno

88. Si las raíces de la ecuación:

$$\left(1 - q + \frac{p^2}{2}\right) x^2 + p\,(1+q) + q\,(q-1) + \frac{p^2}{2} = 0$$

    son iguales. Calcular el valor de: $E = \dfrac{p^2}{q}$. Sol. 4.

11.3. ECUACIONES IRRACIONALES

Lleva el nombre de *irracionales* aquellas ecuaciones en las que la variable se encuentra bajo el signo del radical o bien bajo el signo de elevación de una potencia fraccionaria. Semejantes ecuaciones se consideran sobre el campo de los números reales. Al resolver las ecuaciones irracionales se hace uso de dos métodos fundamentales: 1) elevación de ambos miembros de la ecuación a una misma potencia; 2) introducción de nuevas variables (auxiliares).

11.3.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver las ecuaciones:

$$2\sqrt{x}-\sqrt{4x-3}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$$

Solución.

$$\begin{aligned}2\sqrt{x}-\sqrt{4x-3} &= \frac{1}{\sqrt{4x-3}}\\ 2\sqrt{x} &= \frac{1+(4x-3)}{\sqrt{4x-3}}\\ 2\sqrt{4x^2-3} &= 4x-2\\ \sqrt{4x^2-3} &= 2x-1\\ 4x^2-3 &= 4x^2-4x+1\\ x &= 1\end{aligned}$$

2. Resolver la ecuación:

$$\frac{x^2+2}{x}+\frac{8x}{x^2+2}=6$$

, Solution is: $2-\sqrt{2},\sqrt{2}+2,1-i,1+i$**Solución**.

$$\frac{x^2+2}{x}+\frac{8x}{x^2+2}=6$$

si: $u=\dfrac{x^2+2}{x}$, entonces:

$$\begin{aligned}u+\frac{8}{u} &= 6\\ u^2+8 &= 6u\\ u^2-6u+8 &= 0\\ (u-4)(u-2) &= 0\end{aligned}$$

donde: $u_1 = 4$ y $u_2 = 2$. Para $u_1 = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x} &= 4 \\ x^2+2 &= 4x \\ x^2-4x+2 &= 0 \end{aligned}$$

utilizando la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

donde: $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Para $u_2 = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x} &= 2 \\ x^2+2 &= 2x \\ x^2-2x+2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

donde $x_3 = 1 + i$ y $x_4 = 1 - i$.

3. Resolver la ecuación:

$$\left(x^2-6x\right)^2 - 2\left(x^2-6x\right) = 35$$

Solución. Si $u = x^2 - 6x$, entonces:

$$\begin{aligned} u^2-2u-35 &= 0 \\ (u-7)(u+5) &= 0 \end{aligned}$$

donde $u_1 = 7$ y $u_2 = -5$.

Para $u_1 = 7$:

$$\begin{aligned} x^2-6x-7 &= 0 \\ (x-7)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

donde: $x_1 = 7$ y $x_2 = -1$.

Para $u_2 = -5$:

$$\begin{aligned} x^2-6x+5 &= 0 \\ (x-5)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

donde: $x_3 = 5$ y $x_4 = 1$.

4. Al resolver la ecuación:

$$2\sqrt{x}=\sqrt{x+7}+\frac{8}{\sqrt{x+7}}$$

la raíz obtenida es un múltiplo de:

A) 4 B) 6 C) 7 D) 3 E) Ninguno

5. El valor de x de la siguiente ecuación

$$\sqrt{2x+13}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}$$

es:

A) 2 B) 4 C) 10 D) -7 E) Ninguno

6. Una solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=-11$$

es:

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 3 D) 1 E) Ninguno

7. El valor de A^2+B^2, en la siguiente expresión

$$\sqrt{8x^2+24x+9+A\left(2x+3\right)\sqrt{x^2+3x}}=\sqrt{x+4}+B\sqrt{x}$$

A) 82 B) 5 C) 9 D) 10 E) Ninguno

8. Hallar el valor de x: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=0$.

Solución. Ordenando y elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[2]{x}\right)^2 &= \frac{\left(2-x\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\ x^2 &= 4-4x+x^2\end{aligned}$$

Simplificando:

$$x=1$$

9. Resolver: $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=\frac{10}{\sqrt{x}}$.

Solución. Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+5}\right)^2 &= \left(\frac{10}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2\\ x+5 &= \frac{100}{x}-20+x\end{aligned}$$

simplificando:

$$\frac{100}{x} = 25$$

de donde:

$$x = 4$$

10. Resolver: $\sqrt{4x-11} + 2\sqrt{x} = \dfrac{55}{\sqrt{4x-11}}$.

Solución. Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{x}\right)^2 &= \left(\frac{55}{\sqrt{4x-11}} - \sqrt{4x-11}\right)^2 \\ 4x &= \frac{55^2}{4x-11} - 110 + 4x - 11 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{3025}{4x-11} = 121$$

de donde:

$$\begin{aligned} 4x - 11 &= 25 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

11. Resolver: $\sqrt{x+14} - \sqrt{x-7} = \dfrac{6}{\sqrt{x-7}}$.

Solución. El término $\sqrt{x-7}$, lo llevamos al segundo miembro y elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+14}\right)^2 &= \left(\frac{6}{\sqrt{x-7}} + \sqrt{x-7}\right)^2 \\ x + 14 &= \frac{36}{x-7} + 12 + x - 7 \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} \frac{36}{x-7} &= 9 \\ 9x - 63 &= 36 \end{aligned}$$

de donde:

$$x = 11$$

12. La solución de la siguiente ecuación es

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

A) 8 B) 12 C) 6 D) 2 E) Ninguno.

Solución. Ordenando la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{\sqrt{x}-2} &= \frac{1}{\sqrt{x}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}+3}\\
\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-4} &= \frac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}\right)^2-9}\\
\frac{-4}{x-4} &= \frac{6}{x-9}\\
-4x+36 &= 6x-24\\
10x &= 60
\end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{x=6}$$

13. Una solución de la siguiente ecuación

$$\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=-11$$

es:

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 3 D) 1 E) Ninguno.

Solución. Para resolver más cómodamente hacemos $u^2=x^2+x+1$, de donde

$$\begin{aligned}
\frac{x+u}{x-u}+\frac{x-u}{x+u} &= -11\\
\frac{(x+u)^2+(x-u)^2}{x^2-u^2} &= -11\\
\frac{x^2+2xu+u^2+x^2-2xu+u^2}{x^2-u^2} &= -11\\
2x^2+2u^2 &= -11\left(x^2-u^2\right)\\
13x^2-9u^2 &= 0
\end{aligned}$$

reemplazando nuestro cambio de variables

$$\begin{aligned}
13x^2-9x^2-9x-9 &= 0\\
4x^2-9x-9 &= 0\\
(x-3)(4x+3) &= 0
\end{aligned}$$

donde una de las raíces es:

$$\boxed{x=3}$$

14. El producto de las raíces positivas de la ecuación:

$$64\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)^2-25\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)^2+9=0$$

es:

A) $\dfrac{17}{35}$ B) $\dfrac{35}{17}$ C) $\dfrac{17}{15}$ D) $\dfrac{8}{9}$ E) Ninguno

15. El valor de x en la siguiente igualdad:

$$\sqrt{\left(3\sqrt{2}-4\right)^{-1}}-\sqrt{\left(3\sqrt{2}+4\right)^{-1}}=2\left(x^{-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

es:

A) 4 B) 8 C) 16 D) 126 E) Ninguno

16. Una solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}+\sqrt{1+x}=-\sqrt{2}$$

es:

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) Ninguno

Solución. Racionalizando: $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}\times\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}$,

$$\begin{aligned}-\sqrt{x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x} &= -\sqrt{2}\\ \sqrt{x} &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

de donde:

$$x=2$$

17. Hallar el valor de x: $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$.

Solución. Ordenando primero la ecuación:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+1}-2\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{2x-6}\right)^3\\ (x+1)\sqrt{x+1}-6(x+1)+12\sqrt{x+1}-8 &= 2x-6\\ \left(\sqrt{x+1}\right)^2 &= \left(\frac{8x+8}{x+13}\right)^2\\ x^2+26x+169 &= 64x+64\\ x^2-38x+105 &= 0\\ (x-35)(x-3) &= 0\end{aligned}$$

las soluciones son: $x_1=35$ y $x_2=3$.

18. Hallar el valor de x: $\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2$

19. Resolver: $\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\dfrac{3+x}{2-x}}=2$

20. Calcular: $\dfrac{\left(\sqrt{5x+1}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5x-1}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{5x-1}\right)^{-1}-\left(\sqrt{5x+1}\right)^{-1}}=1{,}25.$

21. Las soluciones de la ecuación: $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{4}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$. Sol. $\dfrac{-9}{8}$, $\dfrac{1}{8}$

22. La suma de las raíces enteras y positivas de la ecuación es:

$$\left(20-20x+x^2\right)^{\frac{1}{5}}+\left(13+20x-x^2\right)^{\frac{1}{5}}=3$$

A) 15 B) 13 C) 20 D) 21 E) Ninguno

23. $4\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=x$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Ninguno

24. La suma de las raíces de la ecuación siguiente: $\sqrt{x+3}+\dfrac{6}{\sqrt{x+3}}=5$, es:

A) 7 B) 1 C) 13 D) −7 E) Ninguno

25. Resolver la siguiente ecuación e indicar cuánto es la suma de las raíces:

$$2\sqrt{x-1}=\frac{3x}{\sqrt{2x+5}}$$

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) Ninguno

11.4. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

1. Si a, b, c y d, son raíces de la ecuación:

$$4x^4-4x^3+5x^2-4x+4=0$$

determinar el valor de: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$.

Solución. Si a, b, c y d, son las raíces, entonces:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$$

multiplicando:

$$x^4+(a+b+c+d)\,x^3+(ab+ac+ad+bc+cd+)\,x^2+(abc+abd+acd+bcd)\,x+abcd=0$$

de donde: $bcd+acd+abd+abc=-4$ y $abcd=4$. De

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}$$

entonces

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=-1$$

2. Si en la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, una de las raíces es igual a la suma de las otras dos. Calcular el valor de:

$$E = \left(4ab + a^3\right) \div c$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) Ninguno

3. Hallar el valor de $q^2 + p$, en la ecuación $x^3 + px + q = 0$ para que se cumpla la siguiente relación entre sus raíces:

$$x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

A) 1 B) 2 C) -2 D) -1 E) Ninguno

4. Resuelve la siguiente ecuación: $6x^4 + 5x^2 - 25 = 0$

5. La suma de las raíces enteras y positivas de la ecuación

$$\left(20 - 20x + x^2\right)^{\frac{1}{5}} + \left(13 + 20x - x^2\right)^{\frac{1}{5}} = 3$$

A) 15 B) 13 C) 20 D) 21 E) Ninguno

6. $\left(x^3 - 2\right)^2 + \left(3x^2 - 2\right)\left(x^3 - 1\right) = x^3$

$$\begin{aligned} \left(x^3 - 2\right)^2 + \left(3x^2 - 2\right)\left(x^3 - 1\right) &= x^3 \\ x^6 - 4x^3 + 4 + 3x^5 - 3x^2 - 2x^3 + 2 - x^3 &= 0 \\ x^6 + 3x^5 - 7x^3 - 3x^2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

7. $\left(m^2 + 5\right)^2 - 2m\,(m + 3) = 6m\,(m - 1)$

$$\begin{aligned} \left(m^2 + 5\right)^2 - 2m\,(m + 3) &= 6m\,(m - 1) \\ m^4 + 10m^2 + 25 - 2m^2 - 6m - 6m^2 + 6m &= 0 \\ m^4 + 2m^2 + 25 &= 0 \end{aligned}$$

8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y hallar la suma de las raíces:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + y + 2} - \sqrt{2x - 3y - 7} = -3 \\ 2\sqrt[3]{x + y + 2} + 3\sqrt{2x - 3y - 7} = 14 \end{cases}$$

A) 1 B) -1 C) 9 D) -9 E) Ninguno

Capítulo 12

SISTEMAS DE ECUACIONES

12.0.1. SISTEMAS LINEALES 2×2

Resolver por el método de igualación, reducción

1. $\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$, Sol: $[x = 3, y = 4]$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 8y = -60 \end{cases}$, Sol: $\left[x = \frac{52}{7}, y = \frac{85}{7}\right]$

3. $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$, Sol: $[x = -1, y = 2]$

4. $\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x - 8y = 13 \end{cases}$, Sol: $\left[x = -\frac{3}{5}, y = -\frac{23}{10}\right]$

5. $\begin{cases} 9x + 16y = 7 \\ 4y - 3x = 0 \end{cases}$, Sol: $\left[x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}\right]$

6. $\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$, Sol: $[x = 6, y = 2]$

7. $\begin{cases} 12x + 5y + 6 = 0 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = -12 \end{cases}$, Sol: $[x = -3, y = 6]$

8. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ \frac{1}{8}y - \frac{5}{6}x = 2 \end{cases}$, Sol: $[x = -3, y = -4]$

9. $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=-\frac{1}{30}\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{20}=1\frac{1}{12}\end{array}\right.$, Sol: $[x=4, y=5]$

10. $\left\{\begin{array}{l}3x-\frac{y-3}{5}=6\\ 3y-\frac{x-2}{7}=9\end{array}\right.$, Sol: $[x=2, y=3]$

11. $\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{2}m+\frac{3}{2}n=2\\ 2m-n=-5\end{array}\right.$, Sol: $[m=-1, n=3]$

12. $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}v+w=-1\\ \frac{1}{2}v-\frac{w}{4}=\frac{5}{2}\end{array}\right.$, Sol: $[v=4, w=-2]$

13. $\left\{\begin{array}{l}\frac{n-3}{3}-\frac{p-4}{4}=0\\ \frac{n-4}{2}+\frac{p+2}{5}=3\end{array}\right.$, Sol: $[n=6, p=8]$

14. $\left\{\begin{array}{c}n+m+p=13\\ m=n+\frac{1}{2}p\\ 3n=3m+\frac{3}{2}p\end{array}\right.$, Sol: $\left[m=\frac{13}{2}, n=\frac{13}{2}, p=0\right]$

15. $\left\{\begin{array}{c}\frac{2u-3v}{12}=\frac{3+w}{3}\\ \frac{u-6v}{4}=-\frac{12+w}{2}\\ \frac{2u+3v}{6}=w+7\end{array}\right.$, Sol: $[u=6, v=4, w=-3]$

16. $\left\{\begin{array}{c}(x-1)^2+(y+1)^2=x^2+y^2\\ (y-2)^2-(x-3)^2=(y-x)(x+y)\end{array}\right.$, Sol: $\left[x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}\right]$

Solución. Simplificando:

$$\begin{aligned} x-y-1 &= 0\\ 6x-2y-9 &= 0\end{aligned}$$

17. Si x es mayor que y en tres unidades, determinar el valor de m en el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c}3x-m=5y\\ 2x+3y=3m+1\end{array}\right.$$

A) 8 B) 6 C) 4 D) 5 E) Ninguno

18. Si $x = a$ y $y = b$ es solución del sistema $3x - 5y = 1$ y $5x - ky = 2$, y la suma de $a + b$ es igual a 3; entonces el valor de la constante k es:

    A) 4 B) 4 C) 6 D) 8 E) Ninguno

    Solución. Reemplazando las soluciones en el sistema

$$\begin{aligned} 3a - 5b &= 1 \\ 5a - kb &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15a - 25b &= 5 \\ 15a - 3kb &= 6 \end{aligned}$$

resolviendo este sistema $a = \dfrac{k-10}{3k-25}$ y $b = \dfrac{-1}{3k-25}$, sumando

$$\begin{aligned} \frac{k-10}{3k-25} + \frac{-1}{3k-25} &= 3 \\ k - 11 &= 9k - 75 \\ -8k &= -64 \end{aligned}$$

donde

$$k = 8$$

19. $\left\{ \begin{array}{c} a(b-2) - b(a-3) = -14 \\ b(a-6) - a(b+9) = 54 \end{array} \right.$, Sol: $[a = -2, b = -6]$

    Solución. Simplificando:

$$\begin{aligned} 2a - 3b - 14 &= 0 \\ 3a + 2b + 18 &= 0 \end{aligned}$$

20. En el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x - c = 5y \\ 2x + 3y = 3c + 1 \end{array} \right.$$

el valor que debe darse a c para que el valor de x exceda al de y en tres unidades.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Ninguno

21. Para que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y = 1 \\ 5y - ay = 2 \end{array} \right.$$

tenga soluciones negativas a debe ser:

A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) Ninguno

22. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+9}{x-9} = \dfrac{y+21}{y+39} \\ \dfrac{x+8}{x-8} = \dfrac{y+19}{y+11} \end{cases}$$

A) $(-10, -20)$ B) $(10, 20)$ C) $(10, -20)$ D) $(-10, 20)$ E) Ninguno

23. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{\sqrt{y}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Sol. $(4, 9)$.

24. En el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ ax - by = 10 \end{cases}$$

calcular $a - b$ para ue admita infinitas soluciones.

A) 20 B) 40 C) 30 D) 60 E) 80

25. **(1012)** Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{x+9}{x-9} = \dfrac{y+21}{y+39} \\ \dfrac{x+8}{x-8} = \dfrac{y+19}{y+11} \end{cases}$$

26. **2012)** En el sistema: $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ ax - by = 10 \end{cases}$ calcular $a - b$ para que admita infinitas soluciones.

A) 20 B) 40 C) 30 D) 60 E) 80

12.1. SISTEMAS LINEALES 3×3

1. $\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 9 \\ 2x + 3y = 12 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 9 \\ \dfrac{2}{a} - \dfrac{3}{b} + \dfrac{2}{c} = 3 \\ \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} - \dfrac{1}{c} = 8 \end{cases}$, Sol: $\left[a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{3}, c = \dfrac{1}{4}\right]$

3. $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} - \frac{z}{4} = 6 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{2}z = 9 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2}y - \frac{z}{8} = 8 \end{cases}$, Sol: $[x = 30, y = 4, z = 8]$

4. Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones son:

$$\begin{cases} x - \frac{y+z}{3} = 4 \\ y - \frac{x+z}{8} = 10 \\ z - \frac{y-x}{2} = 5 \end{cases}$$

A) $(2,;3;6)$ B) $(3;-2;5)$ C) $(10;12;6)$ D) $(2;3;-4)$ E) Ninguno

5. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} - \frac{12}{y} + \frac{15}{z} = 6 \\ \frac{15}{x} + \frac{20}{y} + \frac{6}{z} = 10 \\ \frac{10}{x} + \frac{8}{y} - \frac{9}{z} = 1 \end{cases}$$

$(5, 4, 3)$.

6. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 12\,(x+y) = 5xy \\ 18\,(y+z) = 5yz \\ 36\,(x+z) = 13xz \end{cases}$$

Sol. $(0{,}4, 0{,}6, 0{,}9)$

7. **(2012)** Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} - \frac{12}{y} + \frac{15}{z} = 6 \\ \frac{15}{x} + \frac{20}{y} + \frac{6}{z} = 10 \\ \frac{10}{x} + \frac{8}{y} - \frac{9}{z} = 1 \end{cases}$$

12.2. SISTEMAS CUADRATICOS

1. Para que el siguiente sistema tenga solución única determinar el valor de u.

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -2x - u \end{cases}$$

A) 3 B) 2 C) -2 D) -1 E) Ninguno

2. Si $x = a$, $y = b$ es solución del sistema $3x - 5y = 1$, $5x - ky = 2$; y la suma $a + b$ es igual a 3; entonces el valor de la constante k es:

   A) 6 B) 8 C) 4 D) 2 E) Ninguno.

3. Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}h = 5 \\ \frac{1}{3}f - \frac{3}{8}h = -1 \end{cases}$

   Solución. Eliminando los numeradores:

$$\begin{aligned} 2f + h &= 20 \\ 8f - 9h &= -24 \end{aligned}$$

   Multiplicando la primera ecuación por 9 y sumando a la segunda

$$\begin{aligned} 26f &= 156 \\ f &= 6// \end{aligned}$$

   Reemplazando en $2(6) + h = 20$, despejando $h = 8$

4. Se da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{y+2} - \dfrac{2}{x+y-1} = 1 \\ \dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{x}{y-3} = 2 \end{cases}$$

   el producto de sus dos soluciones es:

   A) 4 B) -4 C) 2 D) 6 E) Ninguno

5. Determinar el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 64 \\ x^3 - 6x^2 + 12x + y = 8 \end{cases}$$

   Solución. Factorizanso la primera ecuación aplicando el método de divisores binómicos

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 64 + 4 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 68 \end{aligned}$$

   de la segunda ecuación

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x + y &= 8 \\ x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + y &= 8 - 8 \\ (x-2)^3 + y &= 0 \\ y &= -(x-2)^3 \end{aligned}$$

reemplazando

$$\begin{aligned}(x-2)^2+\left[-(x-2)^3\right]^2 &= 68\\ (x-2)^6+(x-2)^2 &= 68\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variables $u=(x-2)^2$

$$u^3+u-68=0$$

aplicando Ruffini

	1	0	1	−68
4		4	16	68
	1	4	17	0

entonces $u=4$ y $u^2+4u+17=0$ tiene soluciones imaginarias, reemplazando

$$(x-2)^2=4$$

resolviendo $x_1=0$ y $x_2=4$. El el conjunto solución es

$$CS=\{(0,8),(4,-8)\}$$

6. Si $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{13}{6}$, $x^2+y^2=5$, $x<0<y$ y $|y|<|x|$, halle el valor de $x=\sqrt{2}x+\sqrt{3}y$.

Solución. De: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{13}{6}$, tenemos $6x^2-13x^2y^2+6y^2=0$. Factorizando

$$\left(3x^2-2y^2\right)\left(2x^2-3y^2\right)=0$$

de aquí

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{2}{3}\vee\frac{x^2}{y^2}=\frac{3}{2}$$

reemplazando en $x^2+y^2=5$

$$\left(x^2=2\wedge y^2=3\right)\vee\left(x^2=3\wedge y^2=2\right)$$

como $|y|<|x|$, entonces, solo es posible

$$x^2=3\wedge y^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}\wedge y=\pm\sqrt{2}$$

y como $x<0<y$, se tiene finalmente

$$x=-\sqrt{3}\wedge y=\sqrt{2}$$

reemplazando en $S=\sqrt{2}y+\sqrt{3}x$

$$S=-1$$

7. Para que el siguiente sistema tenga solución única determinar el valor de u

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -2x - u \end{cases}$$

A) 3 B) 2 C) -2 D) -1 E) Ninguno.

Solución. Aplicando el método de igualación tenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= -2x - u \\ x^2 + 2x - (1 - u) &= 0 \end{aligned}$$

Para que esta ecuación tenga una sola solución el discriminante igualamos a cero, esto es

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ 2^2 + 4(1)(1 - u) &= 0 \\ 4u &= 8 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{u = 2}$$

8. $\begin{cases} x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5 \\ x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35 \end{cases}$

A) 64 B) 81 C) 65 D) 75 E) Ninguno

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$, Sol: $[x = -6, y = -2], [x = -4, y = -4]$

10. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$, Sol: $[x = 5, y = 4], [x = -4, y = -5]$

11. $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 23 \\ 3y^2 - 8x = 50 \end{cases}$

12. 421 $\begin{cases} 5x^2 + 14y = 19 \\ 7y^2 + 10x = 17 \end{cases}$

13. 422 $\begin{cases} x^2(x + y) = 80 \\ x^2(2x - 3y) = 80 \end{cases}$

14. 423 $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$, Sol: $[x = 0, y = -2], [x = 2, y = 0]$

15. 424 $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + yz + zx = 3 \end{cases}$, Sol: $[x = 7, y = -3, z = -1], [x = 1, y = 1, z = 1]$

16. 425 $\begin{cases} x^2+3y^2-xz=6 \\ 2x-y+3z=11 \\ x+2y-2z=1 \end{cases}$, Sol: $[x=3, y=1, z=2]$, $\left[x=\frac{593}{183}, y=\frac{106}{183}, z=\frac{311}{183}\right]$

17. 426 $\begin{cases} 9x^2+y^2=13 \\ xy=2 \end{cases}$, Sol: $\left[x=\frac{2}{3}, y=3\right]$, $[x=1, y=2]$, $\left[x=-\frac{2}{3}, y=-3\right]$, $[x=-1, y=-2]$

18. 427 $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0 \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0 \end{cases}$, Sol: $[x=1, y=2]$, $\left[x=-\frac{239}{146}, y=\frac{117}{146}\right]$

19. 428 $\begin{cases} x^2-xy-y^2+x-2y=-2 \\ 3xy-5y^2+3x-6y=-5 \end{cases}$, Sol: $[x=1, y=1]$, $[x=-11, y=-7]$, $[x=3, y=2]$, $[x=-1, y=-2]$

20. 429 $\begin{cases} x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2 \end{cases}$, Sol: $[x=1, y=1, z=1]$, $[x=-2, y=-2, z=-2]$

21. 430 $\begin{cases} x-y=\frac{1}{4}xy \\ x^2+y^2=\frac{5}{2}xy \end{cases}$, Sol: $[x=-2, y=-4]$, $[x=0, y=0]$, $[x=4, y=2]$

22. 431 $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2 \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7 \end{cases}$, Sol: $[x=0, y=0]$, $[x=1, y=0]$

23. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 4x-2z=-2 \\ 4y+3z=25 \end{cases}$$

e indique cuánto es la suma de sus raíces.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) Ninguno

24. La suma de las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{9}{y}=2 \\ \frac{7}{x}-\frac{6}{y}=\frac{11}{2} \end{cases}$$

A) -1 B) 1 C) -2 D) 2 E) Ninguno

25. Resolver: $\begin{cases} 5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3 \\ 25x-9y=81 \end{cases}$

A) 9, 16 B) 3, 4 C) 5, 20 D) 7, 49 E) Ninguno

26. Resolver: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+2} - \sqrt{2x-3y-7} = -3 \\ 2\sqrt[3]{x+y+2} + 3\sqrt{2x-3y-7} = 14 \end{cases}$

A) 5, -6 B) 4, -5 C) 3, -4 D) 2, 3 E) Ninguno

27. Resolver: $\begin{cases} \dfrac{2}{3x+y-2} + \dfrac{3}{4x+y+1} = -\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{1}{3x+y-2} - \dfrac{2}{4x+y+1} = -\dfrac{7}{12} \end{cases}$

A) 8, 20 B) 8, 25 C) 8, -25 D) -8, 25 E) Ninguno

28. Resolver: $\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-y}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}} = \dfrac{1}{15} \\ 15\sqrt{x+y} + 15\sqrt{x-y} = 8\sqrt{x^2-y^2} \end{cases}$

A) 17, -8 B) -17, 8 C) $-17, -8$ D) 17, 8 E) Ninguno

29. Resolver: $\begin{cases} \dfrac{m}{x-a} + \dfrac{n}{y-b} = \dfrac{m-n}{b-a} \\ \dfrac{r}{x-a} - \dfrac{s}{y-b} = \dfrac{r+s}{b-a} \end{cases}$

A) $-a, -b$ B) a, b C) b, a D) $-b, -a$ E) Ninguno

30. Resolver: $\begin{cases} xy + x + y = 23 \\ xz + x + z = 41 \\ yz + y + z = 27 \end{cases}$

A) 5, 3, 6 B) 3, 4, 5 C) 5, 6, 3 D) 3, 6, 5 E) Ninguno

31. Resolver: $\begin{cases} xy - (a-1)(x+y) = 2a - 1 \\ yz - (b-1)(y+z) = 2b - 1 \\ xz - (c-1)(x+z) = 2c - 1 \end{cases}$

Sol. $x = \dfrac{2abc + ab - ac - bc}{bc + ac - ab}, y = \dfrac{2abc + ab - ac - bc}{bc + ac - ab}, z = \dfrac{2abc - ab - ac + bc}{ab + ac - bc}$.

32. Si las ecuaciones:

$$\begin{cases} ax^3 + 3bx^2 + c = 0 \\ bx^3 + 3cx + d = 0 \end{cases}$$

tiene una raíz común, el valor de E será:

$$E = \frac{(ad - 4bc)^3}{(ac^2 + b^2 d)^2}$$

A) 9 B) 3 C) 12 D) 8 E) Ninguno

33. El producto de las soluciones del sistema de ecuaciones nos dá:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

34. **(2012)** Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 12(x+y)=5xy \\ 18(y+z)=5yz \\ 36(x+z)=13xz \end{cases}$$

12.3. SISTEMAS IRRACIONALES

12.3.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3 \\ 25x-9y=81 \end{cases}$$
Hallar $x+y$.
A) 5 B) 50 C) 25 D) 7 E) Ninguno

2. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-1}=\dfrac{11}{2} \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{65}{4} \end{cases}$$
la diferencia de sus soluciones es:
A) 13 B) 15 C) -13 D) -15 E) Ninguno

3. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1 \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4 \end{cases}$
A) $(1;2)$ B) $(1;4)$ C) $(2;0)$ D) $(2;1)$ E) Ninguno

4. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^3}{y}}-\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}=\dfrac{65}{6} \\ x-y=5 \end{cases}$
A) $(9;5)$ B) $(9;4)$ C) $(9;-4)$ D) $(9;-5)$ E) Ninguno

5. $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\dfrac{2}{3}x+5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$
A) $(3;1)$ B) $(3;-1)$ C) $(3;2)$ D) $(3;-2)$ E) Ninguno

6. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3} \\ xy=9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ xy = 8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 \end{cases}$

12. Se da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}} + \sqrt{x+y-1} = \dfrac{11}{2} \\ 2x + y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{65}{4} \end{cases}$$

la diferencia de sus soluciones $(y - x)$ es:

A) 13 B) 15 C) -13 D) -15 E) Ninguno

13. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y hallar el valor de $x + y$

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 18 \\ 9x - 4y = 108 \end{cases}$$

A) 34 B) 28 C) 24 D) 25 E) Ninguno

14. **(2012)** Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{\sqrt{y}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Capítulo 13

PROBLEMAS ALGEBRAICOS

Para poder trabajar con el álgebra es necesario manejar la equivalencia entre el lenguaje común o cotidiano con el lenguaje algebraico. A continuación haremos un paralelo entre los dos lenguajes, para así poder aplicarlo en el planteamiento de problemas.

x	Un número cualquiera
$x+1$	Sucesor de un número
$x-1$	Antecesor de un número
$2x$	Doble de un número, duplo, dos veces, número para, múltiplo de dos
$3x$	Triple de un número, triple, tres veces, múltiplo de 3.

13.1. Problemas de números

1. Hallar tres números enteros consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es igual a 110.

   Solución. Sea:

$$\begin{aligned} x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 &= 110 \\ x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4 &= 110 \\ 3x^2+6x-105 &= 0 \\ x^2+2x-35 &= 0 \\ (x+7)(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

2. ¿Qué número sumado con 75 da 132?

   Solución. Sea el número x. De la condición del problema:

$$x+75=132$$

despejando x resulta:

$$x = 57$$

3. Un número y su siguiente suman 53. ¿ De qué números se trata?

   Solución. Sea el número x y su siguiente es: $x+1$. Entonces por la condición del problema

   $$x + (x + 1) = 53$$

   despejando, resulta que x, es:

   $$x = 26$$

4. Si a un número natural le sumas su anterior y su siguiente, obtienes 111. ¿De qué número se trata?

   Solución. Sea el número natural x, su anterior es: $(x - 1)$ y su siguiente $(x + 1)$. Por las condiciones del problema:

   $$x + (x - 1) + (x + 1) = 111$$

   despejando x, resulta ser:

   $$x = 37$$

5. La suma de tres números consecutivos es 702. ¿Cuáles son esos números?

   Solución. Sea el número x, sus consecutivos son: $(x + 1)$ y $(x + 2)$. Por la condición del problema

   $$x + (x + 1) + (x + 2) = 702$$

   despejando x, el resultado es:

   $$x = 233$$

6. Dos números pares consecutivos suman 474. ¿Cuáles son los dos números?

   Solución. Sea un número par: x, su siguiente par consecutivo es: $x + 2$. Por la condición del problema

   $$x + (x + 2) = 474$$

   simplificando:

   $$x = 236$$

   los dos números son: 236 y 238.

7. Calcula el número natural que, sumado a su siguiente, da 145.

   Solución. Sea el número natural x, su número siguiente es: $x+1$. Por las condiciones del problema:

   $$x + (x + 1) = 145$$

   Resolviendo la ecuación de primer grado:

   $$x = 72$$

8. La suma de tres números consecutivos es 144. ¿Cuáles son esos números?

   Solución. Sea el número x, sus siguientes consecutivos son: $(x+1)$ y $(x+2)$. Por las condiciones del problema:

$$x+(x+1)+(x+2)=144$$

   simplificando: $x=47$. Los números son: 47, 48 y 49.

9. ¿ Cuáles son los tres números pares consecutivos que suman 90?

   Solución. Sea el número par x, su siguiente par consecutivo es $(x+2)$ y el siguiente $(x+4)$. Por la condición del problema:

$$x+(x+2)+(x+4)=90$$

   resolviendo: $x=28$. Los números buscado son: 28, 30 y 32.

10. ¿ Cuál es el número que al multiplicarlo por 2 y sumarle luego 84, el resultado es igual a 284?

    Solución. Sea x el número. Por las condiciones del problema:

$$2x+84=284$$

    despejando la incógnita: $x=100$.

11. Si un número lo multiplicas por 5 y al resultado le restas 40, obtienes el 25. ¿Cuál es el número?

    Solución. Sea x el número. Por la condición del problema:

$$5x-40=25$$

    resolviendo la ecuación:

$$x=13$$

12. Si a un número le sumas su tercera parte y al resultado le sumas 5, obtienes 21. Calcula dicho número.

    Solución. Sea el número x. Por las condiciones del problema:

$$\left(x+\frac{x}{3}\right)+5=21$$

    resolviendo:

$$x=12$$

13. El triple de un número, menos 5, es igual a 16. ¿ Cuál es el número?

    Solución. Sea el número x, el problema dice:

$$3x-5=16$$

    el número es:

$$x=7$$

14. Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?

    Solución. Sea x el número, del problema:

    $$3x - 13 = 86$$

    el número es:

    $$x = 33$$

15. Si restamos el doble de un cierto número a 15, obtenemos 1, ¿De qué número se trata?

    Solución. Sea x el número, el problema nos dice:

    $$15 - 2x = 1$$

    el número es:

    $$x = 7$$

16. La suma de dos números es 44 y su diferencia es 8. Calcula dichos números.

    Solución. Sea x el primer número y y el segundo número. El enunciado del problema dice:

    $$\begin{cases} x + y = 44 & (1) \\ x - y = 8 & (2) \end{cases}$$

    Sumando (1) + (2): $2x = 52 \Rightarrow x = 26$, reemplazando en (2): $26 - y = 8$, entonces $y = 18$. Los números son: 26 y 18.

17. Encuentra tres números enteros que sumen 44, de forma que el primero sea la tercera parte del tercero y éste, el doble que el segundo.

    Solución. Sea a, b y c los tres números. Las condiciones del problema:

    $$\begin{cases} a + b + c = 44 & (1) \\ a = \dfrac{c}{3} & (2) \\ c = 2b & (3) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema (2) en (1) y de (3) despejando: $b = \dfrac{c}{2}$, en (1):

    $$\frac{c}{3} + \frac{c}{2} + c = 44$$

    donde: $c = 24$, reemplazando en (2): $a = 8$. Finalmente $b = 12$. Los números buscados: 8, 12 y 24.

18. Hallar dos números tales que su suma sea 90 y su cociente 9.

    Solución. Sea x un número y el otro y. Las condiciones del problema nos dice:

    $$\begin{cases} x + y = 90 & (1) \\ \dfrac{x}{y} = 9 & (2) \end{cases}$$

resolviendo el sistema. De (2) despejando $x = 9y$, reemplazando en (1):

$$9y + y = 90 \text{ resolviendo } y = 9.$$

entonces $x = 81$. Los números buscados son: 81 y 9..

19. Si a un número le restas 15 y el resultado lo divides entre 3, obtienes 20.¿De qué número se trata?

    Solución. Sea x el número, de la condición del problema:

    $$\frac{x-15}{3} = 20$$

    resolviendo, el número es: $x = 75$.

20. Si a la quinta parte de un número se le añaden 9 unidades, se obtiene la mitad del número. ¿De qué número se trata?

    Solución. Sea x el número, el problema dice:

    $$\frac{x}{5} + 9 = \frac{x}{2}$$

    resolviendo, obtenemos

    $$x = 30$$

21. Restando 5 a los $\frac{2}{3}$ de un número, se obtiene el mismo resultado que sumando 2 a sus $\frac{3}{5}$. ¿De qué número se trata?

    Solución. Sea x un número, el problema nos dice:

    $$\frac{2}{3}x - 5 = \frac{3}{5}x + 2$$

    El número buscado es: $x = 105$.

22. Al dividir un número por 3, 5 y 6 y sumar los respectivos cocientes, se obtiene 63. ¿Cuál es dicho número?

    Solución. Sea x el número. El problema nos dice:

    $$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 63$$

    el número buscado es: 90

23. Dos números se diferencian en dos unidades. La tercera parte del mayor y la quinta parte del menor suman 6. Averigua de qué números se trata.

    Solución. Sea a el primer número y b el segundo número. El problema nos dice:

    $$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 6 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema. multiplicando por 15 la ecuación (2):

$$5x + 3y = 90 \qquad (3)$$

Multiplicando (1) por 3 y sumando con (3): $8x = 96$, donde $x = 12$. Reemplazando en (1): $12 - y = 2$, donde $y = 10$. Se trata de los números: 12 y 10.

24. Descompón el número 48 en dos partes tales que, dividiendo la una por la otra, se obtenga 3 de cociente y 4 de resto.

    Solución. Sea x una parte y la otra y. Del problema (descomponer un número cualquiera en dos partes significa que, sumando las partes, dé el número) podemos decir:

$$\begin{cases} x + y = 48 & (1) \\ x = 3y + 4 & (2) \end{cases}$$

    Para la ecuación (2): $D = dc + r$, donde, el dividendo es x, el divisor y el cociente 3 y el residuo 4. Resolviendo el sistema (2) en (1):

$$3y + 4 + y = 48$$

    donde $y = 11$, reemplazando en (1): $x = 37$.

25. Si un número lo multiplico por 4 me da lo mismo que si a ese número le sumo 9. ¿Cuál es el número?

    Solución. Sea x el número. El problema dice:

$$4x = x + 9$$

    resolviendo: $x = 3$

26. Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual que su triple disminuido en tres unidades.

    Solución. Sea el número x, de la condición del problema:

$$2x + 1 = 3x - 3$$

    despejando x resulta que el número es: $x = 4$.

27. Si a un número le sumamos su cuarta parte, obtenemos el 200. ¿Qué número es?

    Solución. Sea el número x, de la condición del problema:

$$x + \frac{x}{4} = 200$$

    el número buscado es: $x = 160$.

28. Dividir 196 en tres partes tales que la segunda sea el duplo de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 20.

    Solución. Sea x, y y z los tres números, las condiciones del problema nos dice:

$$\begin{cases} x+y+z=196 & (1) \\ y=2x & (2) \\ x+y=z+20 & (3) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema los valores encontrados son: $[x=36, y=72, z=88]$

29. La diferencia entre los cuadrados de dos números pares consecutivos es 52. ¿ De qué números hablamos?

    Solución. Sea x un número par, del problema

$$(x+2)^2 - x^2 = 52$$

    desarrollando la ecuación: $x^2+2x+4x^2-x^2=52$, simplificando y despejando x, resulta:

$$x = 12$$

    los números consecutivos son: 12 y 14. Pruebe con $x^2-(x+2)^2=52$.

30. Halla un número de dos cifras, tal que: a) La cifra de las unidades es el triple de la de las decenas. b) Si se intercambian las dos cifras, el número aumenta en 54.

    Solución. Sea el número ab. Del problema nos dice:

$$\begin{cases} b=3a & (1) \\ 10b+a=10a+b+54 & (2) \end{cases}$$

    de (2) simplificando y ordenando:

$$b-a=6 \qquad (3)$$

    (1) en (3) $3a-a=6$, donde $a=3$ y $b=9$. El número buscado es:

$$39$$

31. Si el triple de un número se resta de 8 veces el número, el número es 45, ¿cuál será el número?

    A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) Ninguno

    Solución. Sea x el número; del problema el triple de un número: $3x$ y 8 veces el número: $8x$. Como el enunciado dice: de $8x$ hay que restar $3x$, esto es

$$8x-3x=45$$

    simplificando:

$$x=9$$

32. Si el dividendo de una división se aumenta en 2000 unidades el cociente y el residuo aumenta en 4 y 8 unidades respectivamente. Determinar el valor del divisor.

    A) 498 B) 894 C) 489 D) 849 E) Ninguno

    Solución. De la fórmula de la división de dos números

$$D = dc + r \qquad (1)$$

    por las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} (D + 2000) &= d\,(c + 4) + (r + 8) \\ D &= dc + d4 + r - 1992 \qquad (2) \end{aligned}$$

    reemplazando (1) en (2) :

$$dc + r = dc + r + d4 - 1992$$

    simplificando: $4d = 1992$, entonces:

$$d = 498$$

33. En un número de tres cifras, al sustraer de la cifra de las unidades la cifra de las centenas, la diferencia es 3, si la suma de sus cifras es 9 y si el número que resulta de invertir sus cifras excede en 9 al triplo del número, hallar el producto de las cifras de dicho número.

    A) 0 B) 27 C) 16 D) 60 E) Ninguno

    Solución. Sea el número de tres cifras abc,

$$\begin{cases} c - a = 3 \\ a + b + c = 9 \\ 100c + 10b + a = 3\,(100a + 10b + c) + 9 \end{cases}$$

    simplificando

$$\begin{cases} c - a = 3 & (1) \\ a + b + c = 9 & (2) \\ 299a + 20b - 97c = -9 & (3) \end{cases}$$

    Multiplicando por -20 la ecuación (2) y sumando con la (3):

$$279a - 117c = -189 \qquad (4)$$

    Multiplicando por 117 la ecuación (1) y sumando con (4):

$$162a = 162$$

    donde $a = 1$, reemplazando en (1): $c = 4$. Reemplazando estos valores en (2): $1 + b + 4 = 9$, entonces $b = 4$. Finalmente el producto de estos valores

$$a \cdot b \cdot c = 16$$

34. **(2012)** Si a un número de resta 24 y la diferencia se multiplica por 12, el resultado es el mismo que si al número se resta 27 y la diferencia se multiplica por 24. Hallar el número.

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) Ninguno.

Solución. Sea x el número. Por las condiciones del problema:

$$\begin{aligned}(x-24)\,12 &= (x-27)\,24\\ x-24 &= 2x-54\\ x &= 30\end{aligned}$$

El número buscado es 30.

35. **(2012)** La diferencia entre la cifra de las unidades y la cifra de las decenas de un número es 4, y si el número se suma con el número que resulta de invertir sus cifras, la suma es 66. Hallar el número.

A) 15 B) 18 C) 19 D) 25 E) Ninguno.

Solución. Sea el número ab. Por las condiciones del problema

$$\begin{cases} b-a=4\\ (10a+b)+(10b+a)=66\end{cases}$$

simplificando el sistema

$$\begin{cases} b-a=4\\ a+b=6\end{cases}$$

donde: $a=1$ y $b=5$, entonces el número buscado es 15.

36. **(2012)** En un número de tres cifras, al sustraer de la cifra de las unidades la cifra de las centenas, la diferencia es 5, si la suma de sus cifras es 12 y si el número que resulta de invertir sus cifras excede en 21 al triplo del número, hallar el producto de las cifras de dicho número.

A) 16 B) 24 C) 42 D) 48 E) Ninguno.

Solución.

$$\begin{cases} c-a=5\\ a+b+c=12\\ 100c+10b+a=3\,(100a+10b+c)+21\end{cases}$$

donde: $a=2$, $b=3$ y $c=7$. El producto de estos números es: 42.

37. Al agregar 18 a un cierto número, el dígito de las unidades y el dígito de las decenas intercambian su posición. Determinar el número sabiendo que el dígito de las unidades es el doble del dígito de las decenas.

A) 36 B) 24 C) 12 D) 42 E) Ninguno.

Solución.

$$\begin{cases} 10a+b+18=10b+a\\ b=2a\end{cases}$$

resolviendo el sistema: $a=2$ y $b=4$. El número es 24.

38. Un número de dos cifras excede en 18 a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades, ¿Cuál es el número?

A) 72 B) 62 C) 52 D) 42 E) Ninguno

Solución.
$$\begin{cases} 10a + b = 6(a+b) + 18 \\ a = b + 5 \end{cases}$$

donde: $a = 7$ y $b = 2$. El número buscado es 72.

39. Tengo 1.85 Bs. en monedas de 10 y 5 centavos. Si en total tengo 22 monedas, ¿cuántas son de 10 centavos y cuántas de 5 centavos?

Solución. Sea x el número de monedas de 10 ctvs y y el número de monedas de 5 ctvs. De las condiciones del problema:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 0{,}1x + 0{,}05y = 1{,}85 \end{cases}$$

resolviendo el sistema: $x = 15$ y $y = 7$. Entonces hay 15 monedas de 10 ctvs y 7 monedas de 5 ctvs.

40. En una división el cociente es 8 y el residuo es 20. La suma de todos los términos de la división es igual a 336. Hallar el dividendo.

A) 276 B) 726 C) 627 D) 267 E) Ninguno

Solución. Por datos del problema: $d = 8$ y $r = 20$

$$\begin{cases} D = dc + r \\ D + d + c + r = 336 \end{cases}$$

reemplazando estos valores en las condiciones del problema

$$\begin{cases} D = 8d + 20 & (1) \\ D + d + 28 = 336 & (2) \end{cases}$$

(1) en (2): $8d+20+d+28 = 336$, donde el divisor es: $d = 32$ y el dividendo en (1): $D = 8(32) + 20$
$$D = 276$$

41. La suma del dividendo y divisor de una división inexacta es 71 veces el residuo y la diferencia del dividendo y divisor es 57 veces el residuo. Hallar el cociente de dicha división.

A) 8 B) 6 C) 2 D) 9 E) Ninguno

Solución. Del problema: $D + d = 71r$, $D - d = 57r$ y la fórmula de la división: $D = dc + r$
$$\begin{aligned} D + d &= 71r \quad (1) \\ D - d &= 57r \quad (2) \end{aligned}$$

42. En un número de tres cifras la cifra de las unidades excede en 5 a la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en uno a la cifra de las centenas. La cifra de las unidades es el doble de la suma de las cifras de las decenas y centenas. Cuál es el número.

    A) 130 B) 136 C) 225 D) 126 E) Ninguno

    Solución. Sea el número de tres cifras: abc. Por las condiciones del problema

$$\begin{cases} c = a + 5 & (1) \\ b = a + 1 & (2) \\ c = 2(b + a) & (3) \end{cases}$$

    Resolviendo el sistema: igualando (1) y (3) $a + 5 = 2b + 2a$, donde

$$a + 2b = 5 \qquad (4)$$

    (2) en (4): $a + 2(a + 1) = 5$, simplificando: $a = 1$. De (2): $b = 2$ y de (1): $c = 6$, entonces el número buscado es:

$$126$$

43. Aumentando en 9 a los dos factores de un producto, el producto aumenta en 549. Hallar el mayor de los factores, si la diferencia entre ellos es 18.

    A) 17 B) 18 C) 30 D) 35 E) Ninguno

    Solución. Sea los factores de un producto: a y b el producto está dado por: ab. Por las condiciones del problema:

$$\begin{cases} (a + 9)(b + 9) = ab + 549 & (1) \\ a - b = 18 & (2) \end{cases}$$

    De(1) $ab + 9b + 9a + 81 = ab + 549$, simplificando:

$$a + b = 52 \qquad (3)$$

    sumando (2) y (3): $2a = 70$, entonces $a = 35$, reemplazando en (3) $b = 17$. El mayor de los factores es:

$$a = 35$$

44. Hallar tres números consecutivos, tales que el cociente del mayor entre el menor, equivale a los $\frac{3}{10}$ del número intermedio.

    Solución. Sea x, $x + 1$ y $x + 2$ los tres números, de la división en forma de fracción,

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{x} &= \frac{3}{10}(x + 1) \\ 10x + 20 &= 3x^2 + 3x \\ 3x^2 - 7x - 20 &= 0 \\ (3x - 12)(3x + 5) &= 0 \end{aligned}$$

    se toma la solución positiva $x_1 = 4$, las soluciones son: 4, 5 y 6

45. El producto de dos números es 352, si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 10. Hallar el número mayor. Sol. 32.

    Solución. Sean los números x el menor y y el mayor, según el enunciado del problema
    $$xy = 352$$
    De la división entre dos números: $D = dc + r$, reemplazando
    $$y = 2x + 10$$
    resolviendo el sistema
    $$\begin{cases} xy = 352 & (1) \\ y = 2x + 10 & (2) \end{cases}$$
    (2) en (1) $x(2x + 10) = 352$, de donde se obtiene la ecuación de segundo grado
    $$\begin{aligned} x^2 + 5x - 176 &= 0 \\ (x + 16)(x - 11) &= 0 \end{aligned}$$
    tomando la solución positiva $x = 11$, reemplazando en (2) el número mayor es $y = 32$.

46. Si al minuendo de una resta se le suma 38 y al sustrayendo se le suma 45, la nueva diferencia 85. Hallar la diferencia primitiva.

    Solución. Del enunciado del problema:
    $$\underbrace{(x + 38)}_{Minuendo} - \underbrace{(y + 45)}_{Sustrayendo} = 85$$
    simplificando:
    $$x - y = 92$$

47. Hallar n número de dos cifras, sabiendo que la suma de sus dígitos es 15 y que la diferencia del número original de dos cifras con el número formado por los mismos dígitos escritos en orden inverso es 27.

    Solución. Del enunciado del problema, sea el número ab y el número escrito en orden inverso es ba, entonces:
    $$\begin{cases} a + b = 15 \\ (10a + b) - (10b + a) = 27 \end{cases}$$
    simplificando:
    $$\begin{cases} a + b = 15 & (1) \\ a - b = 3 & (2) \end{cases}$$
    sumando (1) + (2) $2a = 18$, de $a = 9$ reemplazando en (1) $9 + b = 15$, entonces $b = 6$. El número buscado es:

48. Un número N es tal que multiplicado por 2, 5, 6, 7, 8 y 11 respectivamente, resultan como productos los siguientes números, cuyas formas son: $abcdef$, $cdefab$, $efabcd$, $bcdefa$, $fabcde$ y $defabc$. Hallar N sabiendo que: $a+b+c+d+e+f=27$. Sol. 76923.

    Solución. Sea el número N:

$$\begin{cases} 2N = abcdef \\ 5N = cdefab \\ 6N = efabcd \\ 7N = bcdefa \\ 8N = fadcde \\ 11N = defabc \end{cases}$$

    reemplazando por su equivalente

$$\begin{cases} 2N = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f \\ 5N = 10^5c + 10^4d + 10^3e + 10^2f + 10a + b \\ 6N = 10^5e + 10^4f + 10^3a + 10^2b + 10c + d \\ 7N = 10^5b + 10^4c + 10^3d + 10^2e + 10f + a \\ 8N = 10^5f + 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e \\ 11N = 10^5d + 10^4e + 10^3f + 10^2a + 10b + c \end{cases}$$

    sumando miembro a miembro:

$$\begin{aligned} 39N &= 10^5(27) + 10^4(27) + 10^3(27) + 10^2(27) + 10(27) + 27 \\ &= 20\left(10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0\right) \end{aligned}$$

    note que $10^1 = 10$ y $10^0 = 1$, despejando $N = 76\,923$.

49. El dividendo en un cierta división es 1081. Si el cociente y el residuo son iguales, además se sabe que el divisor es el doble del cociente. ¿Cuál es el divisor?

    A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) Ninguno

    Solución. Sea la forma: $D = dc + r$, donde $D = 1081$, $c = r$ y $d = 2c$, reemplzando

$$\begin{aligned} 1081 &= (2c)(c) + c \\ 2c^2 + c - 1081 &= 0 \end{aligned}$$

    utilizando la fórmula de la raíz de una ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} c &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1081)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{8649}}{4} = \frac{-1 \pm 93}{4} \end{aligned}$$

    se obtiene los siguientes resultados: $c_1 = 23$ y $c_2 = -\dfrac{47}{2}$, se toma la solución positiva 23, entonces el dividendo $d = 2(23) = 46$

50. Dado un número de tres cifras consecutivas, calcular la diferencia entre este número y el mismo pero escrito al revés.

    Solución. Sea el número de tres cifras $a\,(a+1)\,(a+2)$, escrito en la forma de sumas: $100a + 10\,(a+1) + (a+2)$ y el número escrito al revéz $(a+2)\,(a+1)\,a$, en la forma de sumas: $100\,(a+2) + 10\,(a+1) + a$. Vemos que el número escrito al revéz es siempre mayor que el número escrito normalmente, entonces la diferencia

$$\begin{aligned} & [100\,(a+2) + 10\,(a+1) + a] - [100a + 10\,(a+1) + (a+2)] \\ = \; & 100a + 200 + 10a + 10 + a - 100a - 10a - 10 - a - 2 \end{aligned}$$

    simplificando:

$$198$$

51. Al comprar 20 pantalones, me sobran 480 Bs., pero al comprar 24 pantalones; me faltarían 120 Bs. ¿Cuánto costo cada pantalón? Sol. 150

    Solución. Sea x el precio unitario por pantalón, entonces $20x$ es el monto que necesito para comprar los 20 pantalones y $24x$ el monto para comprar 24 pantalones. Si compro los 20 pantalones me sobran 480 Bs. es decir: $20x + 480$ es el dinero que tuviera; pero si compro los 24 pantalones me faltan 120 Bs., es decir $24x - 120$, que también es el monto de dinero que tengo. Como mi monto de dinero no cambia en ambas transacciones, igualamos ambos montos:

$$20x + 480 = 24x - 120$$

    simplificando:

$$x = 150$$

    el precio de cada pantalón es 150 Bs.

52. Hallar el mayor de tres números enteros cuya suma es 8, si se sabe que el segundo excede al doble del tercero en 5 y que el primero es igual al doble del segundo.

    A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) NInguno

    Solución. Sea a, b y c los tres. Del problema $a + b + c = 8$, $b = 2c + 5$ y $a = 2b$, expresando esto en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 8 & (1) \\ b = 2c + 5 & (2) \\ a = 2b & (3) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema (2) y (3) en (1)

$$\begin{aligned} 2\,(2c+5) + (2c+5) + c &= 8 \\ 4c + 10 + 2c + 5 + c &= 8 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

reemplazando en (2) $b = 3$ y este valor en (3) $a = 6$. El número buscado es 6.

53. Un número de tres cifras es tal que la cifra de las decenas es la mitad de las centenas, también la cifra de la centena es igual a la diferencia entre las cifras de las unidades y la cifra de las decenas, por último la cifra de la unidad es igual a nueve. Hallar la suma de los dígitos de este número.

    A) 18 B) 16 C) 12 D) 14 E) Ninguno

    Solución. Sea el número $\overline{abc}$. Del problema $b = \dfrac{a}{2}$, $a = c - b$ y $c = 9$, llevando a un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} b = \dfrac{a}{2} & (1) \\ a = c - b & (2) \\ c = 9 & (3) \end{cases}$$

    despejando de (1) $a = 2b$ y (3) en (2), resulta: $2b = 9 - b$, simplificando: $b = 3$, finalmente $a = 6$. La suma de los tres dígitos $a + b + c = 18$.

54. Al dividir un número de dos cifras por la cifra de las unidades se obtiene como cociente 8 y como residuo 7. Si se divide dicho número de dos cifras por la cifra de las decenas se obtiene como cociente 11 y como residuo 2. ¿Cuál es el número?

    A) 79 B) 98 C) 87 D) 73 E) Ninguno

    Solución. Sea el número $\overline{ab} = 10a + b$ y de la división $D = dc + r$, donde el Dividendo es $(10a + b)$, el divisor es b, el cociente es 8 y el residuo es 7; es decir

$$10a + b = 8b + 7$$

    de la segunda parte del problema

$$10a + b = 11a + 2$$

    resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 10a - 7b = 7 & (1) \\ a - b = -2 & (2) \end{cases}$$

    despejando a de (2) y reemplazando en (1) $10a - 7(b - 2) = 7$, simplificando $a = 7$, reemplazando en (2) $7 - b = -2 \Rightarrow b = 9$ el número buscado es:

$$\overline{ab} = 79$$

55. Al agregar 18 a un cierto número, el dígito de las unidades y el dígito de las decenas intercambian su posición. Determinar el número sabiendo que el dígito de las unidades es el doble del dígito de las decenas.

Solución. De la primera parte:

$$\begin{aligned} \overline{ab}+18 &= \overline{ba} \\ 10a+b+18 &= 10b+a \qquad (1) \end{aligned}$$

y

$$b=2a \qquad (2)$$

(2) en (1)

$$10a+2a+18=10\,(2a)+a$$

simplificando $a=2$ y $b=4$. El número buscado es:

$$\overline{ab}=24$$

Solución. Sea x la cifra de las decenas, y, la cifra de las unidades del número buscado. Entonces, el propio número tiene la forma $10x+y$. Del planteamiento del problema se deduce primero, que $y-x=2$ y, segundo, que $(10x+y)\,(x+y)=144$. Como resultado llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y-x=2 \\ (10x+y)\,(x+y)=144 \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones $(2;4)$ y $\left(-3\frac{2}{11};-1\frac{2}{11}\right)$. El segundo par no satisface el planteamiento del problema. Por lo tanto, el número buscado es igual a 24.

13.2. Problemas de edades

1. **(2012)** Si un padre tiene ahora dos años más que la suma de las edades de sus dos hijos juntos y hace 8 años tenía 6 veces la edad del hijo menor y 2 veces la del mayor. Determine la edad del hijo mayor.

   A) 25 B) 23 C) 22 D) 20 E) Ninguno

2. **(2012)** Raúl le dice a Carla: ¿o tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. Si la suma de nuestras edades actuales es 42 años, ¿qué edad tendremos cuando tú tengas la edad que yo tengo?"

   A) 40 y 34 B) 35 y 24 C) 30 y 24 D) 25 y 20 E) Ninguno

3. Marisa es tres años más joven que su hermana Nadia y un año mayor que su hermano Roberto. Entre los tres igualan la edad de su madre, que tiene 38 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

   Solución. Sea la edad de Maritsa M, la edad de Rosa N y la edad de Roberto R. El problema nos dice:

$$\begin{cases} M=N-3 & (1) \\ M=R+1 & (2) \\ M+N+R=38 & (3) \end{cases}$$

resolviendo el sistema: despejando N de (1): $N = M + 3$ y de (2) despejamos $R = M - 1$, reemplazando estos en (3):

$$M + M + 3 + M - 1 = 38$$

simplificando $M = 12$, reemplazando en: $N = 15$ y en $R = 11$. La edad de Maritsa es 12 años, la edad de Nadia 15 años y la edad de Roberto 11 años.

4. Maribel y Karina tienen 6 y 9 años, respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben tener para que, entre las dos niñas, igualen la edad de su madre?

   Solución. Sea x los años que pasan para que las dos edades de las hijas iguales a la edad de la madre, entonces

   $$(6 + x) + (9 + x) = (35 + x)$$

   simplificando: $x = 20$. Deben transcurrir 20 años para que las edades de los hijos sumen la edad de la madre.

5. Un padre tiene 40 años, y su hijo, 10. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga el doble que la edad del hijo?

   Solución. Sea x los años transcurridos, de la condición del problema:

   $$(40 + x) = 2\,(10 + x)$$

   simplificando: $x = 20$. Deben transcurrir 20 años para que la edad del padre sea el doble de la del hijo.

6. La edad de doña Magdalena es 6 veces la de su nieta Beatriz, pero dentro de 8 años será sólo el cuádruple. ¿Cuál es la edad de cada una?

   Solución. De la condición del problema

   $$\begin{cases} M = 6B & (1) \\ (M + 8) = 4\,(B + 8) & (2) \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema (1) en (2):

   $$6B + 8 = 4B + 32$$

   simplificando: $B = 12$, reemplazando en (1): $M = 72$. La edad de Magdalena es 72 años y la edad de Beatriz es 12 años.

7. Una madre tiene 47 años y su hija, 25. ¿ Cuántos años hace que la edad de la madre era doble que la de su hija?

   Solución. Sea x los años pasados, del problema

   $$(47 - x) = 2\,(25 - x)$$

   simplificando y hallando la incóganita $x = 3$. Hace tres años la edad de la madre es el doble de la edad de su hija.

8. La edad de Juan y la de su hermano Elías suman la mitad de la edad de su padre Alberto. Si Juan tiene 14 años y su padre tiene 6 veces la del hermano de Juan , ¿cuál es la edad del hermano de Juan?

   Solución. Las condiciones del problema dice:

$$\begin{cases} J+E=\dfrac{A}{2} & (1)\\ J=14 & (2)\\ A=6E & (3)\end{cases}$$

   Reemplazando (2) y (3) en (1): $14+E=3E$, de donde $E=7$, en (1) $A=42$. La edad de Elías es 7 años y la del padre 42 años.

9. Juan tiene el doble de edad que Raúl, y Laura tres años más que Juan. Si la suma de sus edades es 38, ¿cuál es la edad de cada uno?

   Solución. De los datos del problema:

$$\begin{cases} J=2R & (1)\\ L=J+3 & (2)\\ J+R+L=38 & (3)\end{cases}$$

   De (1) despejando R y de (2) reemplazando en (3), se tiene:

$$J+\frac{J}{2}+J+3=38 \Rightarrow \frac{5}{2}J=35 \Rightarrow J=14$$

   en (2): $L=17$, finalmente en (1) $R=7$. La edad de Juan es 14 años, la de Laura 17 años y de Raúl 7 años.

10. Las edades de Arturo y su abuelo Jerundio suman 96 años. Si el nieto tiene 50 años menos que el abuelo, ¿cuál es la edad de cada uno?

   Solución. El problema nos dice:

$$\begin{cases} A+J=96 & (1)\\ A=J-50 & (2)\end{cases}$$

   resolviendo el sistema (2) en (1): $J-50+J=96$, de donde $J=73$, entonces $A=23$: La edad de Arturo es 23 años y su abuelo 73 años.

11. La edad de Juan es la cuarta parte de la de su padre. Hace seis años era la décima parte. ¿Cuántos años tiene Juan?

   Solución. De las condiciones del problema:

$$\begin{cases} J=\dfrac{P}{4} & (1)\\ (J-6)=\dfrac{P-6}{10} & (2)\end{cases}$$

   simplificando (2): $10J-P=54 \quad (3)$, de (1) despejamos $P=4J$ y reemplazaos en (3): $10J-4J=54$, de donde $J=9$, reemplazando en (1): $P=36$. La edad de Juan es 9 años y su padre 36 años.

12. Un padre dice a su hijo: hoy, mi edad es triple que la tuya, pero dentro de 18 años será sólo el doble. ¿Cuántos años tiene cada uno?

    Solución. Del problema::

$$\begin{cases} P = 3H & (1) \\ P + 18 = 2\,(H + 18) & (2) \end{cases}$$

    Simplificando (2): $P - 2H = 18 \qquad (3)$, reemplazando (1) en (3): $3H - 2H = 18 \Rightarrow H = 18$, reemplazando en (1) $P = 54$. La edad del padre es 54 años y su hijo es 18 años.

13. Dos hermanos tienen 15 y 12 años respectivamente. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que la suma de sus edades sea 51?

    Solución. Sea x los años transcurridos. Del problemas podemos deducir que:

$$(15 + x) + (12 + x) = 51$$

    resolviendo la ecuación: $x = 12$. Tiene que transcurrir 12 años.

14. Un padre y sus dos hijos suman 60 años. Halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que la del mayor es triple que la del menor, y que la del padre es doble que la de sus dos hijos juntos.

    Solución. Del problema:

$$\begin{cases} p + h_1 + h_2 = 60 & (1) \\ h_1 = 3h_2 & (2) \\ p = 2\,(h_1 + h_2) & (3) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema: (2) en (3) $p = 8h_2 \qquad (3)$, reemplazando (2) y (3) en (1)

$$8h_2 + 3h_2 + h_2 = 60$$

    donde $h_2 = 5$, reemplazando en (2): $h_1 = 15$, finalmente estos datos en (3): $p = 40$. La edad del padre es 40 años, la del hijo mayor es 15 años y la del menor 5 años.

15. La suma de las edades de dos personas es de 81 años. Una de ellas es 25 años mayor que la otra. ¿Cuáles son sus edades?

    Solución. Del problema podemos expresarlo:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 81 & (1) \\ p_1 = p_2 + 25 & (2) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema: (2) en (1) $p_2 + 25 + p_2 = 81$, de donde $p_2 = 28$. Este dato en (2) $p_1 = 53$. La edad de la primera persona es 53 años y la edad de la segunda persona es 28 años.

16. Un padre tiene 43 años, y sus hijos, 13 y 10 años, respectivamente. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hermanos iguales la edad del padre?

    Solución. Sea x los años transcurridos. La condición del problema, dice:

    $$(13 + x) + (10 + x) = 43 + x$$

    resolviendo la ecuación, resulta que $x = 20$. Tiene que transcurrir 20 años.

17. Mi abuelo tiene 69 años. Si yo tuviera 15 años más y él 15 años menos, entonces mi edad sería la mitad que la suya. ¿Cuántos años tengo?

    Solución. Sea x mi edad. De la condición del problema:

    $$\frac{69 - 15}{2} = x + 15$$

    resolviendo la ecuación, resulta que mi edad es: 12 años.

18. Ana y María tienen 4 y 8 años respectivamente, y su madre 36. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la suma de las edades de las hermanas sea igual a la de su madre? ¿Qué edad tendrán transcurridos esos años?

    Solución. Sea x los años que han de transcurrir, de la condición del problema:

    $$(4 + x) + (8 + x) = (36 + x)$$

    resolviendo la ecuación, deben transcurrir 24 años para que iguales ambas edades de las hijas a la de la madre, esto es a los 28 años de Ana, 32 años de María y 60 años de su madre.

19. Javier tiene 30 años menos que su padre y éste tiene 4 veces los años de Javier. Averigua la edad de cada uno.

    Solución. De las condiciones del problema:

    $$\begin{cases} J = P - 30 & (1) \\ P = 4J & (2) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema (2) en (1) $J = 4J - 30 \Rightarrow J = 10$, reemplazando en (2) $P = 40$. La edad de Javier es 10 años y la de su padre 40 años.

20. La edad de A hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Hallar la edad ctual de A. Sol. 10 años

    Solución. Del planteamiento del problema

    $$A - 6 = \sqrt{A + 6}$$

    Resolviendo, elevamos al cuadrado ambos miembros

    $$\begin{aligned} (A - 6)^2 &= \left(\sqrt{A + 6}\right)^2 \\ A^2 - 12A + 36 &= A + 6 \\ A^2 - 13A + 30 &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo por los factores $(A-10)(A-3)=0$. Tomamos como la edad actual de $A=10$ años, porque si $A=3$, hace tres años no existiera ó también no es solución de la condición del ejercicio.

21. René tiene 9 años, Felix, tantos como René y Jorge, Jorge tantos como René y Víctor; Víctor tiene 7 años. ¿Cuál es la edad de Mario, que si tuviera 15 años menos tendría igual edad que los cuatro anteriores juntos?

    A) 72 B) 42 C) 27 D) 24 E) Ninguno

    Solución. De la condición del problema:

$$\begin{cases} R=9 & (1) \\ F=R+J & (2) \\ J=R+V & (3) \\ V=7 & (4) \\ M-15=R+F+J+V & (5) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema: $F=25$, $J=16$, $M=72$, $R=9$ y $V=7$ son las edades respectivamente.

22. La edad de Luis es los $\frac{3}{5}$ de la edad de José, y si ambas edades se suman, la suma excede en 4 años al doble de la edad de Luis. ¿Cuánto es el producto de las edades de José y Luis?

    A) 50 B) 70 C) 60 D) 80 E) Ninguno

    Solución. De las condiciones del problema:

$$\begin{cases} L=\frac{3}{5}J & (1) \\ L+J=2L+4 & (2) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema, resulta que la edad de José es 10 años y la de Luis es 6 años. El producto de ambas edades es 60.

23. Las edades de Ángela, Benedicto y Carlos suman 45 años. Dentro de dos años la suma de las edades de Ángela y Carlos será igual al doble de la edad de Benedicto, quien ha nacido tres años antes que Ángela. ¿Qué edad tiene cada uno?

24. Hace 5 años la edad de una mamá era seis veces la edad de su hija y ahora es solamente igual a tres veces y media. ¿Qué edad tiene cada una?

25. La suma de las edades de dos personas es 85 años y la edad del menor aumentada en 36 años es igual a la edad del mayor disminuida en 20. ¿Cuáles son sus edades?

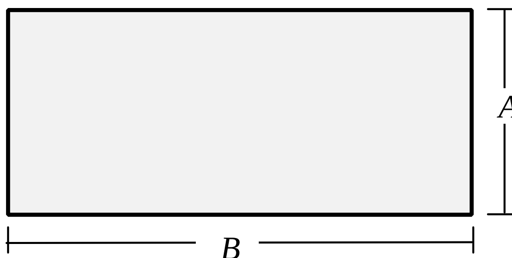
13.3. Problemas de geometría

1. Para formar una caja abierta de 60 cm cuadrados de base a partir de una placa rectangular de estaño de 9×12 cm se cortan de sus esquinas unas piezas cuadradas y se doblan después las aristas. Hallar la longitud del lado del cuadrado que se cortan en cada esquina.

   Solución.
   $$(9-2x)(12-2x)=60$$

2. La base de un rectángulo es 7 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 54 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo?

   Solución. La gráfica del problema:

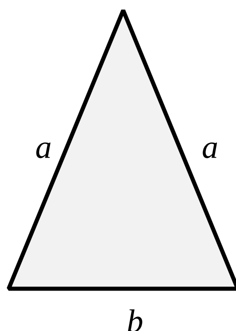
   

   de los datos del problema (el perímetro es la suma de todos los lados):
   $$\begin{cases} B=A+7 & (1) \\ 2A+2B=54 & (54) \end{cases}$$

   resolviendo el sistema: la ecuación (2) dividimos entre 2: $A+B=27 \qquad (3)$; (1) en (3): $A+A+7=27 \Rightarrow A=10$. En (1): $B=17$. La base mide 17 cm y la altura mide 10 cm.

3. En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales es 5 cm más largo que el lado desigual. El perímetro mide 55 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

   Solución. Graficando el problema:

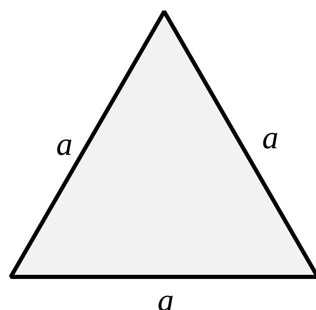
   

   De las condiciones del problema:
   $a=b+5 \qquad (1)$
   $2a+b=55 \qquad (2)$
   Resolviendo el sistema, (1) en (2):
   $2b+10+b=55$, despejando $b=15$
   reemplazando en (1): $a=20$

   En el triángulo isósceles la base mide 15 cm y uno de los lados iguales mide $a=20$ cm.

4. Si al perímetro de un triángulo equilátero le sumásemos la mitad de la longitud de uno de los lados y lo multiplicáramos por 2, nos daría 28. ¿Cuánto mide el lado?

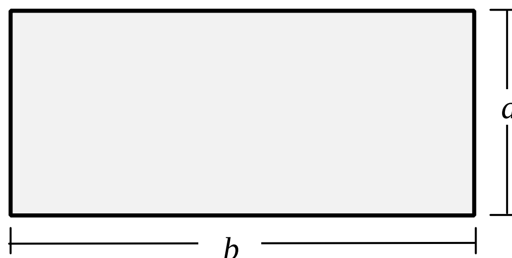
   Solución. Graficando el problema (el perímetro del triángulo equilátero es $3a$):



   De las condiciones del problema:
   $$2\left(3a+\frac{a}{2}\right)=28$$
   Resolviendo la ecuación:
   $a=4$
   El lado mide 4.

5. Con una cuerda de 120 cm formamos un rectángulo cuyo lado mayor es el triple del lado menor. Halla el valor de los dos lados.

   Solución. Graficando el problema, el lado mayor es b y el lado menor es a.



   el problema nos dice que: una cuerda de 120 cm forma un rectángulo esto quiere decir que es el perímetro, esto es: $2a+2b=120$, dividiendo esta ecuación por 2 resulta: $a+b=60$, la segunda parte del problema nos dice que el lado mayor es el triple del lado menor, esto es: $b=3a$, se forma el sistema:
   $$\begin{cases} a+b=60 & (1)\\ b=3a & (2)\end{cases}$$
   resolviendo, (2) en (1): $a+3a=60 \Rightarrow a=15$, reemplazando en (2): $b=45$. El lado mayor mide 45 cm y el lado menor 15 cm.

6. Con las baldosas que tengo se puede formar un cuadrado, sobrando 25. Para formar otro mayor, de una baldosa más por lado, faltan 46. ¿Cuántos tengo?

   Solución. Sea n el número de baldosas, del problema la primera parte nos dice que se forma un cuadrado esto es a^2, pero sobra 25 es decir

que sumndo obtendremos las n baldosas; de la segunda parte aumentando una baldosa más esto es $(a+1)^2$, pero me faltan 46 baldosas es del área formado le quito 46 y esto es las n baldosas, expresando en forma de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2+25=n & (1) \\ (a+1)^2-46=n & (2) \end{cases}$$

resolviendo el sistema: (1) = (2);

$$\begin{aligned} a^2+25 &= (a+1)^2-46 \\ a^2+25 &= a^2+2a+1-46 \end{aligned}$$

simplificando, hallamos:

$$a=35$$

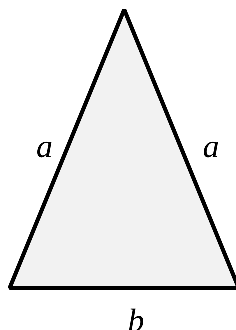
reemplazando en (1): $35^2+25=n$, donde:

$$n=1250$$

tengo 1250 baldosas.

7. El perímetro de un triángulo isósceles es de 54 cm y cada uno de los lados iguales mide 6 cm más que el triple de la base. ¿Cuál es la longitud de los lados?

   Solución. Graficando el problema:



De las condiciones del problema:

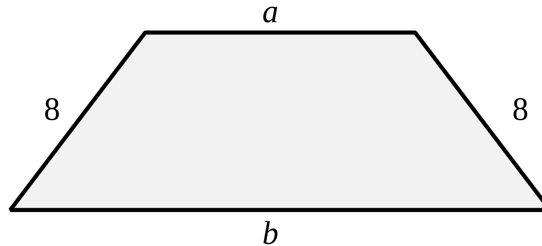
$$\begin{cases} 2a+b=54 & (1) \\ a=3b+6 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación (2) en (1):
$6b+12+b=54 \Rightarrow b=6$
reemplazando en (2): $a=24$

   Uno de los lados iguales mide 24 cm y el lado desigual mide 6 cm.

8. Los lados iguales de un trapecio isósceles miden 8 cm cada uno y una de las bases es doble que la otra. Calcula la longitud de dichas bases sabiendo que el perímetro mide 46 cm.

Solución. La gráfica del problema:



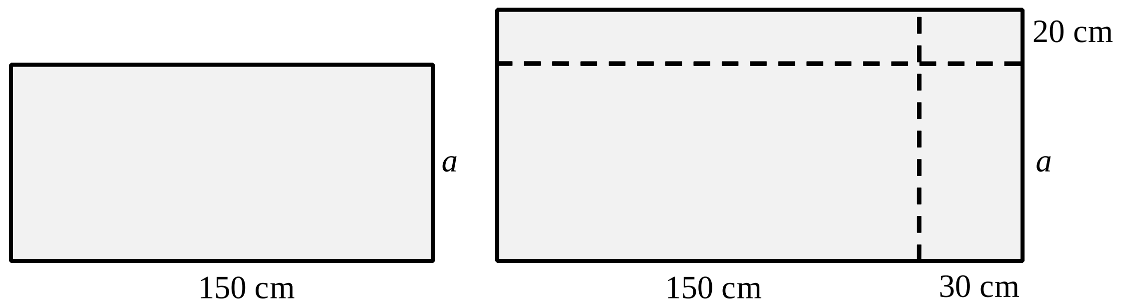
el perímetro del trapecio es: $a + b + 16 = 46$, la condición del problema nos dice: $b = 2a$, resolviendo:

$$a + 2a + 16 = 46$$

simplificando: $a = 10$ y $b = 20$. La base mayor mide 20 cm y la base menor 10 cm.

9. Una finca rectangular mide 150 cm de largo. Si fuera 30 cm. más larga y 20 cm más ancha, su superficie sería 6.000 cm^2 mayor. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

   Solución. La gráfica del problema:



de la condición del problema (El área es igual a la base por la altura:

$$a150 + 6000 = 180 \cdot (a + 20)$$

resolviendo la ecuación: $a = 80$ cm. El ancho del rectángulo original es de 80 cm.

10. Un terreno rectangular mide x metros de largo, y su ancho dos tercios de esa longitud. Para vallarla, son necesarios 200 m de valla. ¿Qué medidas tiene el terreno?

Solución. La gráfica del problema:



Las condiciones del problema nos dice que para cercar el perímetro con una valla necesita 200 m, esto es: $2a + 2x = 200$ y $a = \frac{2}{3}x$, el sistema se forma:

$$\begin{cases} 2a + 2x = 200 & (1) \\ a = \frac{2}{3}x & (2) \end{cases}$$

(2) en (1): $\frac{2}{3}x + x = 100 \Rightarrow x = 60$, reemplazando en (2): $a = 40$. El largo del terreno mide 60 m y el ancho 40 m.

11. La valla que rodea una parcela rectangular mide 80 m. La parcela mide 10 m más de largo que de ancho. ¿Cuáles son las medidas de la parcela?



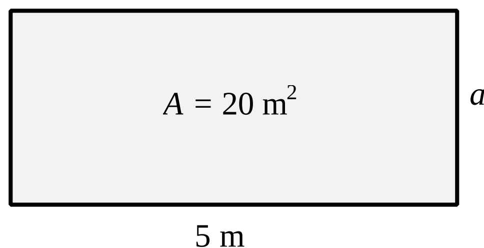
Solución. De las condiciones del problema (la valla es el perímetro)

$$\begin{cases} 2a + 2l = 80 & (1) \\ l = a + 10 & (2) \end{cases}$$

la solución del sistema:: $[a = 15, l = 25]$

12. El área de un rectángulo es 20 m^2 y su base mide 5 m. ¿ Cuánto mide su altura?

Solución. La gráfica del problema:



El área está dado por: $20 = 5 \cdot a$, donde $a = 4$. La altura mide 4 m.

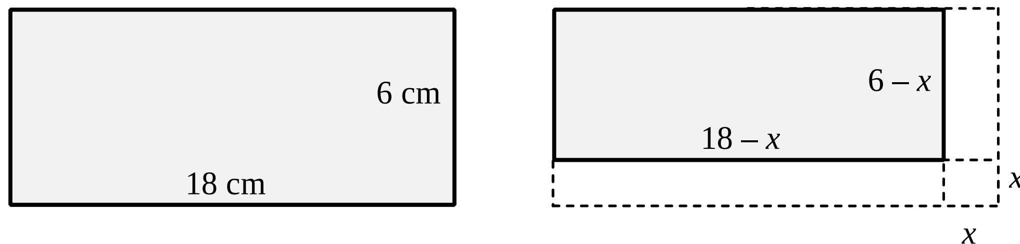
13. El área de un cuadrado es 8 m^2 mayor que la del otro. El lado del primer cuadrado es 2 m mayor que la del segundo. ¿Cuánto miden los lados?

    Solución. Las condiciones del problema (el área de un cuadrado $A = a^2$).

$$\begin{cases} a_1^2 = a_2^2 + 8 & (1) \\ a_1 = a_2 + 2 & (2) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema (2) en (1): $(a_2 + 2)^2 = a_2^2 + 8$, donde $a_2 = 1$, reemplazando en (2): $a_1 = 3$. El lado del primer cuadrado vale 3 m y el lado del segundo cuadrado es 1 m.

14. Los lados de un rectángulo miden 18 y 6 cm respectivamente. Quitamos a cada lado el mismo número de cm y se obtiene otro rectángulo de 32 cm de perímetro. ¿Cuántos cm hemos quitado?



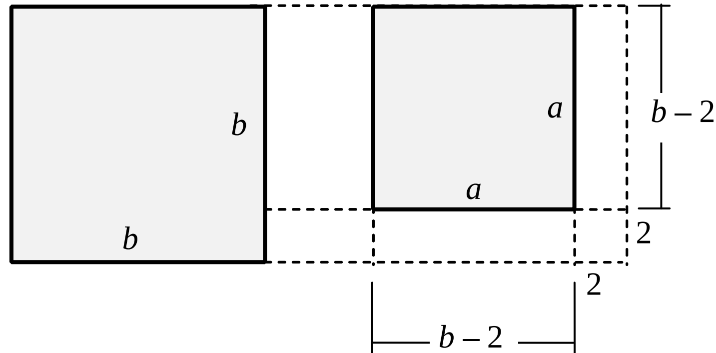
    Solución. De los datos del problema (el perímetro es la suma de todos los lados):

$$2\,(18 - x) + 2\,(6 - x) = 32$$

    resolviendo la ecuación, $x = 4$. Hemos quitado 4 cm a cada lado.

15. Un cuadrado tiene 2 m menos de lado que otro, y su área es 76 m^2 menos

que la del segundo. Halla los lados de ambos cuadrados.

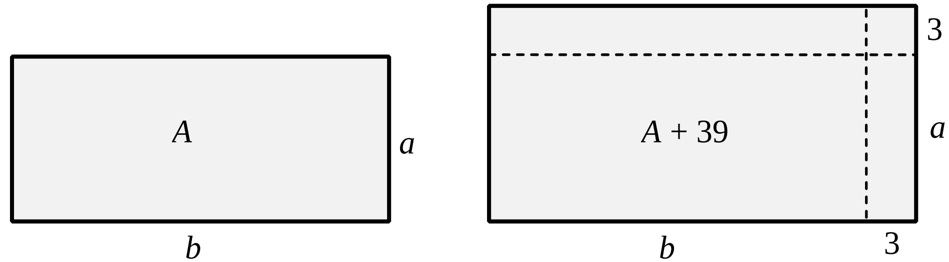


Solución. De los datos del problema:

$$\begin{cases} a = b - 2 \\ a^2 = b^2 - 76 \end{cases}$$

, Solution is: $[a = 18, b = 20]$

16. La base de un rectángulo mide 2 cm más que la altura. Si aumentamos en 3 cm la base y la altura de dicho rectángulo, su área aumenta en 39 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?



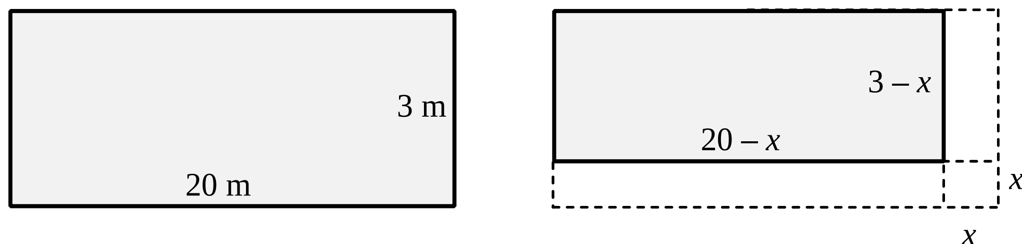
Solución.

$$\begin{cases} b = a + 2 & (1) \\ (b+3)(a+3) = ab + 39 & (2) \end{cases}$$

resolviendo el sistema, la solución es: $[a = 4, b = 6]$

17. En una fábrica se han utilizado únicamente piezas de 20 m de largo y 3 de ancho. Para desperdiciar menos tela se va a reducir el largo y el ancho en la misma longitud. El perímetro de la nueva pieza será 38 m. ¿Cuánto se reduce cada lado de la pieza? ¿Cuánto medirán los lados de la nueva

pieza?



Solución. De acuerdo al enunciado del problema:

$$2(20-x)+2(3-x)=38$$

resolviendo la ecuación, se debe reducir 2 m a cada lado, es decir de largo 18 metros y de ancho 1 metros.

18. La base de un rectángulo mide 3 metros más que su altura. Si aumentamos 2 m la altura y 3 m la base, el rectángulo tiene 72 m^2 más de área que el primero. ¿Cuánto miden los lados del primer rectángulo? ¿Y los del segundo?

    Solución. Del enunciado podemos concluir:

$$\begin{cases} b=a+3 & (1) \\ (b+2)(a+3)=ab+72 & (2) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema: $[a=12, b=15]$. El primer rectángulo tiene base igual a 15 metros y altura igual a 12 metros, el segundo rectángulo tiene base 18 metros y altura 14 metros.

19. En un rectángulo la base es cuatro veces mayor que la altura y el perímetro mide 1140 metros. ¿Cuánto mide cada lado? (456 y 114 m)

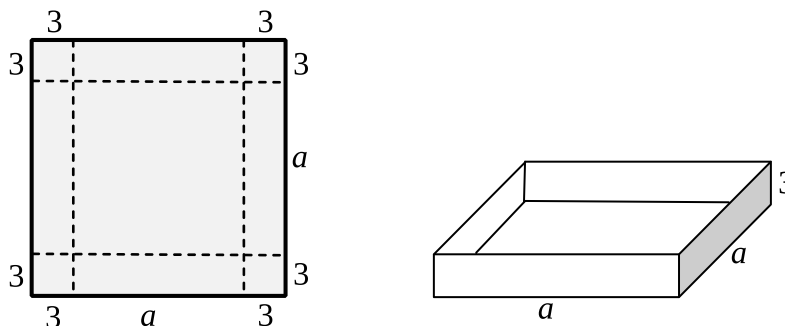
    Solución. De los datos del problema:

$$\begin{cases} b=4a & (1) \\ 2a+2b=1140 & (2) \end{cases}$$

    resolviendo el sistema: $[a=114, b=456]$, la base del rectángulo mide 456 metros y la altura 114 metros.

20. Una caja con base cuadrada y sin tapa se construye partiendo de una lámina cuadrada de estaño, cortando un cuadrado de 3 cm por lado en cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Si la caja debe contener

48 cm^3, ¿qué dimensiones debe tener la base de la caja?



Solución. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es: $V = A_b h$, donde $A_b = a^2$ y $h = 3$:

$$a^2(3) = 48$$

resolviendo la ecuación: $a = 4$. La base de la caja debe tener 4 cm de lado.

21. Un lote rectangular con un área de 625 m^2, hay que cercar los lados laterales deben ser de piedra y los otros dos de madera. Un metro de cerca de madera cuesta 10 dólares y el de piedra 25 dólares. Para la construcción debe asignarse:

    A) 1700 B) 1750 C) 1650 D) 1800 E) Ninguno

    Solución. De los datos del problema:

$$ba = 625$$

22. Un terreno tiene 20 metros por 14 metros, la construcción que ocupa el centro del terreno es de 160 metros cuadrados, dejando la misma distancia de la construcción a los 4 lados. Hallar dicha distancia.

    A) 1 metro B) 2 metros C) 3 metros D) 4 metros E) Ninguno.

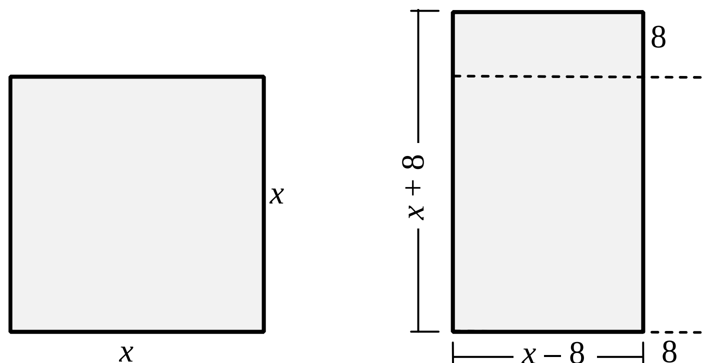
    Solución. De los datos del problema

$$(20 - 2x)(14 - 2x) = 160$$

    , Solution is: $2, 15$

23. Un terreno de forma cuadrada, de lado x se halla fuera de la razante, debido a la ampliación de la avenida en 8 metros, afectando el frente del terreno. Sin embargo, la alcaldía compensa al dueño con otros 8 metros al

lado contiguo del terreno. El área actual del terreno es:



A) $x^2 - 64$ B) x^2 C) $x^2 - 8$ D) $x^2 + 8$ E) Ninguno

Solución. Del gráfico el área del nuevo terreno es:

$$\begin{aligned} A &= (x-8)(x+8) \\ &= x^2 - 8^2 \end{aligned}$$

El área del nuevo terreno es: $x^2 - 64$ metros cuadrados.

24. **(2012)** El perímetro de una sala rectangular es 56 m. Si el largo se disminuye en 2 m y el ancho se aumenta en 2 m, la sala se hace cuadrada. Hallar el lado mayor de la sala.

A) 12 B) 16 C) 14 D) 18 E) Ninguno

13.4. Problemas de móviles

1. Un peatón y un ciclista avanzan por una carretera, el uno hacia el otro, con velocidades de 6 km/h, respectivamente. ¿Cuánto tardarán en encontrarse si la distancia que los separa es de 8 km?

2. Un camión sale de cierta población, por una autopista, a 80 km/h. Tres cuartos de hora más tarde sale en su persecución un coche a 120 km/h.¿Cuánto tardará en alcanzarlo?

3. El tren de alta velocidad que cubre la línea Madrid-Sevilla salió de la estación de Sevilla con una velocidad de 240 km/h. Simultáneamente, partió de Madrid un tren con destino a Sevilla que circulaba a 60 km/h. La distancia de Sevilla a Madrid es de 542 km. ¿Cuánto tardaron en encontrarse?

4. Un coche y un camión parten respectivamente, a la misma hora , de dos ciudades, A y B, distantes 380 km. Se cruzan en u n punto intermedio

del camino que está 30 km más cerca de B que de A. Sabiendo que la velocidad del camión es de 80 km/h, calcula el tiempo transcurrido hasta el encuentro, y la velocidad del coche.

5. La distancia entre dos estaciones A y B es 240 km. Un tren sale de A dirección a B con una velocidad constante de 50 km/h. Al mismo tiempo, otro tren sale de B en dirección a A con una velocidad de 70 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿ A qué distancia de A y B se encuentran? (2 horas. 100 km y 140 km)

6. De dos pueblos que distan 75 km salen, en sentido contrario, un peatón y un ciclista. El primero marcha a una velocidad de 5 Km/h y el segundo de 20 km/h. ¿Dónde y cuándo se encontrarán? (A 15 y 60 km. 3 h. Más tarde)

7. De dos estaciones A y B que están a 360 km salen, al mismo tiempo, dos trenes. El tren que sale de A lleva una velocidad de 50 km/h y se encuentra con el que sale de B a 150 km de A. ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse? ¿Qué velocidad lleva el que sale de B? (3 horas. 70 km/h)

8. Dos estaciones A y B distan 240 km. De ellas salen dos trenes en el mismo sentido. El tren que sale de A en dirección a B lleva una velocidad de 70 km/h y el que sale de b, de 50 km/h. ¿Cuánto tardan en alcanzarse? ¿A qué distancia de A y B se alcanzarán? (12 h. A 840 km de A y a 600 km de B)

9. Un automóvil sale de un punto A a una velocidad de 50 km/h. Cuatro horas más tarde, otro automóvil sale de A a 100 km/h. ¿A qué distancia de A alcanzará el segundo automóvil al primero? ¿Qué tiempo tardará en alcanzarle? (A 400 km. 8 horas)

10. Dos ciudades A y B están separadas una distancia de 300 km. A las 9 h sale de A hacia B un coche a la velocidad constante de 80 km/h. Dos horas después, sale de B hacia A otro coche a la velocidad constante de 60 km/h. ¿Cuánto y dónde se encontrarán? (12 h. A 240 km de a y a 60 km de B)

11. Dos trenes salen, uno al encuentro del otro, a la misma hora de dos puntos A y B distantes entre sí 600 km. Se encuentran en un punto C distante de B 280 km. Si las velocidades de ambos trenes son constantes y la del tren que sale de A es de 80 KM/H, averigua el tiempo que tardan en encontrarse y la velocidad del tren que sale del punto B? (4 h. 70 km/h)

12. Un motociclista sale de un punto A a la velocidad constante de 45 km/h y una hora más tarde, sale del mismo punto en su persecución un automovilista a la velocidad constante de 60 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo? ¿A qué distancia del punto A lo alcanzará? (3 h. A 180 km de A)

13. Un ciclista pasea por una carretera desplazándose a la velocidad constante de 6 m/s. En un momento determinado y a 1.730 m del punto donde se encuentra, se produce una explosión ¿Cuánto tiempo tardará el ciclista en percibir el ruido de la misma, si la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m/s? (5 seg.)

14. Dos trenes salen de Irún para Madrid; uno, tres horas antes que el otro . El que sale primero recorre 40 km/h y el otro, 50. ¿A qué distancia de Irún se alcanzarán? (600 km)

15. Una persona dispone de dos horas para dar un paseo. Parte en tranvía, con velocidad media de 12 km/h, y vuelve a pie, con velocidad media de 4 km/h. ¿A qué distancia deberá dejar el tranvia? (6 km)

16. A la misma hora salen de la ciudad A hacia B, que distan 80 km, un ciclista que va a la velocidad uniforme de 16 km/h, un motorista a 40 km/h y un automóvil a 80 km/h. ¿A qué hora pasa cada uno por la ciudad B? (A las 5, 2 y 1 hora respectivamente)

17. Un tren sale de A a la velocidad de 70 km/h. Al mismo tiempo, sale otro tren de B a su encuentro a la velocidad de 90 km/h. Si la distancia entre A y B es de 400 km, ¿cuánto tiempo tardarán en cruzarse y a qué distancia de A se produce el cruce? (2,5 horas y a 175 km de A)

18. Un tren sale de A a las 9 de la mañana a 60 km/h. Otro sale de B a su encuentro a las 12 horas a 50 km/h. Si la distancia entre A y B es de 620 km, ¿cuánto tiempo tardarán en cruzarse y en qué punto se cruzan? (A 7 h. Del tren que salió de A y 420 km de A)

19. A las 9 de la mañana sale un ciclista de la ciudad A a la velocidad de 18 km/h. A la misma hora un automovilista sale de la ciudad B con dirección a A a la velocidad de 54 km/h. Sabiendo que la distancia entre ambas ciudades es de 188 km, ¿a qué hora se produce el encuentro? ¿A qué distancia de A? (A las 11 h. 36 min. Y 40 seg. A 47 km de A y 141 de B)

20. Un motorista cuya velocidad es de 40 km/h sale de A a las 8 de la mañana en dirección a B. Dos horas más tarde, un automovilista sale en su persecución a la velocidad de 60 km/h. Calcular a qué hora alcanza el automovilista al ciclista y a qué distancia de A le alcanza. (A las 14 horas. A 240 km)

21. Un tres recorre 420 kilómetros en cierto tiempo (en horas). En la segunda vez recorre la misma distancia en 30 minutos menos, por haber aumentado su velocidad en 20 kilómetros por hora. En qué tiempo (en horas) recorrió la distancia en la primera vez.

    A) 3.5 B) 2.5 C) 1.5 D) 4.5 E) Ninguno

22. Tres ciclistas arrancan juntos en una carrera en que la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo

tarda 11 segundos en dar una vuelta a la pista y el tercer ciclista tarda 12 segundos en dar una vuelta a la pista. Luego de cuántos segundos pasarán juntos por vez primera por la línea de salida?

A) 90 B) 420 C) 180 D) 660 E) Ninguno

23. Un aeroplano va de Santa Cruz a Beni y regresa en 100 minutos. A causa del viento de ida demora 12 minutos mas que el de regreso, ¿cuántos minutos demora cada viaje?

24. Dos trenes salen de la misma ciudad y la misma hora en sentidos opuestos. A las tres horas y media se encuentran uno del otro a 392 km de distancia. Si la velocidad del primero es $\frac{3}{4}$ del otro, ¿cuál es la velocidad de cada uno de ellos en km/h?

A) 75, 100 B) 100, 120 C) 120, 160 D) 115, 130 E) Ninguno

25. Un tren vá a 120 km/h pasa por A en el mismo instante que otro que va a 100 km/h pasa por B y van uno hacia el otro. A dista de B 550 km si los trenes pasan por A y B a las 8:00 a.m. los dos trenes se encontrarán a horas.

A) 10:45 B) 11:15 C) 10:30 D) 11:30 E) Ninguno

26. Dos autos salen de un pueblo al mismo tiempo y van en la misma dirección por el mismo camino. Uno de ellos viaja a 30 km/hora y el otro a 46 km/hora. ¿En cuántas horas estarán separados por 72 kilómetros?

A) 4.5 horas B) 4 horas C) 5.5 horas D) 5 horas E) Ninguno

13.5. Problemas de mezclas

1. Mezclando vino de 200 ptas./litro con vino de 350 ptas/ litro, se han obtenido 500 litros de vino, de calidad intermedia, que sale a 290 ptas/litro. ¿cuántos litros de cada clase se han empleado?

2. ¿Cuántos litros de aceite de girasol, a 150 ptas/litro, se deben mezclar con 15 litros de aceite de oliva, a 750 ptas/litro, para que la mezcla salga a 600 ptas/litro?

3. Mezclando aceite de 800 ptas/litro con aceite de 600 ptas /litro se han obtenido 20 litros de aceite de calidad intermedia. Cada litro resultante de la mezcla sale a 670 ptas/litro. ¿Cuántos litros de cada clase se han empleado?

4. Se han mezclado 10 litros de leche de calidad superior con 8 litros de leche de calidad inferior. De esta mezcla se ha obtenido leche que se vende a 110 ptas/litro. Lo único que se sabe sobre el precio de los dos tipos de leche que hemos mezclado es que la calidad de la leche superior cuesta 36 ptas/litro más cara. ¿Cuál es el precio de cada uno de los dos tipos de leche?

5. Reparte 1.000 ptas entre tres personas de forma que la primera reciba el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera.

6. He gastado $\frac{1}{5}$ de mi paga en un radio y $\frac{1}{4}$ en invitar a mis amigos. Ahora compré un reloj, que me cuesta 110 Bs., y aún me quedarán 440 Bs. ¿Cuál era la paga completa?

7. En mi bolsillo llevo 27 monedas, unas de un Bs. y otras de 5 Bs.. El valor total de las monedas es de 95 Bs. ¿Cuántas monedas llevo de cada clase?

   Solución. Sea x el número de monedas de un Bs. y y el número de monedas de 5 Bs.
   $$\begin{cases} x + y = 27 & (1) \\ x + 5y = 95 & (2) \end{cases}$$
   la solución del sistema es: $[x = 10, y = 17]$. Existen 10 monedas de un Bs. y 17 monedas de 5 Bs.

8. Un comerciante desea mezclar dos clases de manies que cuestan Bs. 3 y Bs. 4 por kg respectivamente, con nuez de Bs. 8 por kg para obtener 140 kg de una mezcla que cueste Bs. 6 por kg. Si también desea que la cantidad de maní de menor precio sea el doble del mani más caro, ¿cuántos kilogramos de cada tipo debe mezclar? Sol. 40 kg de mani de Bs. 3; 20 kg de maní de Bs. 4 y 80 kg. de nueces.

9. Un radiador contiene 8 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si el 40 % de la mezcla es anticongelante, ¿cuánta mezcla se debe eliminar y reemplazar por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60 % del mismo? Sol. $2\frac{2}{3}$ l.

10. Un recipiente contiene 16 litros de una mezcla que tiene 20 % de antióxido. Se desea sacar una parte de la mezcla y reemplazarla por antióxido puro con el fin de elevar el porcentaje de antióxido en la mezcla a 25 %. Entonces la cantidad (en litros) que debe reemplazarse es:

    A) 15 B) 10 C) 5 D) 1 E) Ninguno

    Solución. $\frac{4}{16} = 0{,}25$
    $$\begin{aligned} \frac{x}{16} &= 0{,}20 \\ x &= 3.2 \end{aligned}$$
    $$\frac{3{,}2 + m}{16} = 0{,}25$$
    reemplazando x
    $$\begin{aligned} 3{,}2 + m &= 4 \\ m &= 0{,}8 \end{aligned}$$
    , Solution is: 0,64

11. Un joyero tiene un lingote de oro de ley 0.900 que pesa 1500 g. ¿Qué cantidad de oro puro (en g) tendrá que añadir al lingote para elevar su ley a 0.925?

    Solución. Ley inicial $L_0 = 0{,}9$. Por definición

    $$L_0 = \frac{W_{oro}}{W_T} \Rightarrow W_{oro} = L_0 W_T = (0{,}9)\,(1500 \text{ g}) = 1350 \text{ g}$$

    Cuando agregamos x g de oro la nueva ley es $L_1 = 0{,}925$

    $$L_1 = \frac{W_{oro} + x}{W_T + x}$$

    reemplazando

    $$0{,}925 = \frac{1350 + x}{1500 + x}$$

    de donde

    $$x = 500$$

12. Un líquido se hecha en botellas de 40 litros de capacidad, con ello una botella quedará del todo llena. Si este mismo líquido se hecha en botellas de 50 litros de capacidad se necesitarán tres botellas menos y todas quedarán llenas. Si el líquido se hecha en botellas de 70 litros de capacidad se necesitarán 9 botellas menos, pero de nuevo una botella no estará llena del todo. ¿cuántos litros de líquido había?

    A) 800 B) 100 C) 850 D) 900 E) Ninguno

13. ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74 % de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90 % de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84 % de alcohol?

    A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) Ninguno

14. **(2012)** Un depósito contiene 20 litros de una mezcla de alcohol y agua, a 50 % de alcohol en volumen. Hallar el número de litros de la mezcla que se debe sustituir por un volumen igual de agua para que la solución resultante tenga el 20 % de alcohol en volumen.

    A) 5 B) 10 C) 11 D) 12 E) Ninguno

13.6. Problemas de grifos

1. Un depósito dispone de dos grifos , A y B. Abriendo solamente el A, el depósito se llena en 3 horas. Abriendo ambos se llena en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abre solamente el grifo B?

2. Un estanque puede ser llenado por 2 grifos, uno de los cuales vierte 200 litros en 5 minutos y el otro 150 litros en 6 minutos. El estanque tiene un desagüe por el que salen 80 litros en 4 minutos. En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío, se abren al mismo tiempo los dos grifos y el desagüe, sabiendo que la capacidad del estanque es de 495 litros.

13.7. Diversos

1. **(2012)** Un hacendado compró 35 caballos. Si hubiera comprado 5 caballos más por el mismo precio, cada caballo le habrá costado 10 Bs. menos. ¿Cuánto le costó cada caballo?

   A) 80 Bs B) 50 Bs C) 30 Bs D) 20 Bs E) Ninguno

2. **(2012)** Cinco personas han comprado una tienda contribuyendo por partes iguales. Si hubiera habido 2 socios más, cada uno hubiera pagado 800 Bs. menos. ¿Cuánto costo la tienda?

   A) 12000 Bs B) 15000 Bs C) 13000 Bs D) 14000 Bs E) Ninguno

3. **(2012)** En una clase el número de señoritas es $\frac{1}{3}$ del número de varones. Si ingresaran 20 señoritas y dejaran de asistir 10 varones, habría 6 señoritas más que varones. Hallar la diferencia entre el número de varones y el de señoritas.

   A) 36 B) 24 C) 12 D) 48 E) Ninguno

4. **(2012)** Un hombre compró cierto número de libros por 400 Bs. Si hubiera comprado $\frac{1}{4}$ más del número de libros que compró por el mismo dinero, cada libro le habría costado 2 Bs menos. ¿Cuánto pagó por cada libro?

   A) 10 Bs B) 15 Bs C) 20 Bs D) 5 Bs E) Ninguno

5. **(2012)** Cierto número de personas alquiló un ómnibus para una excursión. Si hubiera ido 10 personas más, cada uno habría pagado 5 Bs menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada uno habría pagado 5 Bs más. ¿Cuántas personas iban en la excursión?

   A) 30 B) 20 C) 15 D) 40 E) Ninguno

6. **(2012)** Un hombre gastó el año antepasado los $\frac{3}{8}$ de sus ahorros; el año pasado $\frac{5}{12}$ de sus ahorros iniciales; este año $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba y aun tiene 400 Bs. ¿A cuánto ascendían sus ahorros?

   A) 2500 Bs B) 3800 Bs C) 4500 Bs D) 4800 Bs E) Ninguno

7. **(2012)** Un obrero de una fábrica gasta diariamente las dos terceras partes de su jornal en su alimentación, la quinta parte lo ahorra para pagar la mensualidad de su habitación y el resto lo utiliza para gastos imprevistos. Si en un mes de 30 días, de los cuales no trabajó 2 días por encontrarse enfermo, el monto de gastos imprevistos asciende a 180 pesos, los cuales lo utilizó para pagar la receta del médico. Indicar ¿Cuál es el jornal del obrero?

   A) 60 B) 90 C) 80 D) 45 E) Ninguno

8. En una caja hay cierta cantidad de monedas. Un niño retira una moneda y en seguida su hermano mayor un tercio del resto, el otro hermano la mitad de lo que quedaba y finalmente el hermano mayor se llevo na onceava parte de lo que sobró. Determinar cuántas monedas había originalmente en la caja si el padre encontró 30 monedas.

   A) 200 B) 100 C) 300 D) 400 E) Ninguno

9. Un grupo de personas alquiló por un determinado monto fijo un bus para una excursión. Si hubieran ido 10 personas más, cada una habría pagado 5 bolivianos menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada una habría pagado 5 bolivianos más. ¿Cuánto pagó, en bolivianos cada persona?

   A) 20 B) 16 C) 25 D) 30 E) Ninguno

10. Un propietario no quiso vender una movilidad cuando le ofrecieron 3000 dólares, con lo cual hubiera ganado el 25 % del costo que él pagó; pero poco después lo vendió a 2760 dólares. ¿Qué porcentaje, del costo que pagó, ganó el propietario?

    A) 12 % B) 16 % C) 15 % D) 10 % E) Ninguno

11. Un comerciante compró cierto número de sacos arroberos de azúcar por un costo de 1000 Bs. Si hubiera comprado 10 sacos arroberos más por el mismo dinero, cada saco le habría costado 5 Bs. menos. ¿Cuántos sacos compró?

    A) 35 B) 40 C) 50 D) 45 E) Ninguno

12. Un obrero de una fábrica gasta diariamente las dos terceras partes de su jornal en su alimentación, la quinta parte lo ahorra para pagar la mensulidad de su habitación, y el resto lo utiliza para gastos imprevistos. Si en un mes de 30 días, de los cuales no trabajo 2 días, por encontrarse enfermo, el monto de gastos imprevistos asciende a 120 Bs., los cuales lo utilizó para pagar la receta del médico. Indicar cuál es el jornal del obrero.

    A) 60 Bs. B) 90 Bs. C) 80 Bs. D) 45 Bs. E) Ninguno

13. En una fábrica se paga a los hombres 80 Bs. por día y a las mujeres 60 Bs. por día. En junio (considerar 30 días) se paga en total 165000 Bs. ¿Cuál es el número de hombres que trabajan, si hay 10 mujeres más que hombres?

    A) 25 B) 35 C) 45 D) 55 E) Ninguno

14. Un arquitecto de obra gana el doble de lo que gana un maestro albañil y el triple de lo que percibe su ayudante. Entre los tres juntos perciben 3300 Bs. ¿el arquitecto de obra gana?

    A) 600 B) 900 C) 2000 D) 1800 E) Ninguno

15. Una persona por cada 100 huevos que compra se le rompen 10 huevos y por cada 100 huevos que vende regala 10 huevos. Si vendió 1800 huevos. ¿Cuántos huevos ha comprado?

    A) 2400 B) 2100 C) 2200 D) 2300 E) Ninguno.

16. Una bolsa contiene 255 bolivianos en monedas de 2 y 5 bolivianos. Sabiendo que hay 19 monedas más de 2 bolivianos que de 5 bolivianos, determinar el número de monedas de 5 bolivianos en la bolsa.

    A) 30 B) 29 C) 28 D) 31 E) Ninguno

17. Un industrial gasta diariamente Bs. 150000 para el pago de los jornales de 40 operarios de una clase y 75 de otra clase; pero con el mismo gasto desea duplicar el número de operarios de la primera clase y reducir 25 a los operarios de la segunda clase, ¿cuál será el nuevo jornal de un operario de cada clase? Sol. 1500, 1200.

18. Una empresa agrícola tiene una granja de 100 acres, en la que cultiva lechuga y coliflor. Cada acre de coliflor necesita 600 horas de trabajo y cada acre de lechuga 400 horas. Si se dispone en un total de 45000 horas y si se deben usar todos los recursos de terreno y mano de obra, calcule el número de acres que se deben cultivar de cada verdura. Sol. 25 acres de coliflor y 75 acres de lechuga.

19. Compré A cuadernos por Bs. 40 y B lapiceros por Bs. 40. Cada lapicero me costó Bs. 1 más que cada cuaderno. Calcular A si excede a B en 2 unidades.

20. Los gastos de una excursión son Bs. 90. Si desisten de ir 3 personas cada una de las restantes tendría que pagar Bs. 1 más, ¿cuántas personas van a la excursión? Sol. 18

21. Dos agricultores A y B tienen respectivamente 9 y 5 hectáreas de terreno que desean sembrar. Cuando habían sembrado $\frac{2}{7}$ de cada propiedad, contrar a un peón, y a partir de entonces los agricultores y el peón trabajan en partes iguales. ¿Cuánto debe aportar cada agricultor para pagar al peón, si en total deben pagar 140 Bs.? Sol. $A = 90$ Bs. y $B = 50$ Bs.

22. Un estudiante tiene calificaciones de 64 y 26 en sus exámenes del primer y segundo parcial, ¿qué calificación debe alcanzar en la tercera prueba para obtener un promedio de 51 puntos? Sol. 63

23. Una compañía ganó 30000 Bs. en tres años. En el segundo año ganó el doble de lo que había ganado en el primer y en el tercer año ganó tanto como en los dos años anteriores juntos, ¿cuál fue la ganancia en el segundo año?

    A) 12000 B) 15000 C) 25000 D) 10000 E) Ninguno

24. Si se compra igual cantidad de lapiceros de dos colores, al venderse la cuarta parte quedan menos de 118 por vender, y si se vendiera la sexta parte quedarán más de 129 por vender. ¿cuántos lapiceros se compraron?

    A) 155 B) 156 C) 160 D) 148 E) Ninguno

25. A una fiesta infantil realizada en su casa, Gabi invitó a 27 niños, pero sólo llegaron temprano unos cuantos con los cuales se compartieron en partes iguales 1728 caramelos, a mitad de la fiesta llegaron los restantes a los cuales Gabi apresurada les repartió los suyos, tocándole a cada uno de ellos 9 caramelos, ¿cuántos llegaron temprano, si estos son menos de los que llegaron tarde?

    A) 12 B) 8 C) 14 D) 11 E) Ninguno

26. A una fiesta asistieron 105 personas entre niños, mujeres y hombres. La mitad de los niños era la séptima parte de las mujeres que asistieron y los hombres que no bailaban eran la octava parte de las mujeres. Cuántas mujeres estuvieron en la fiesta.

    A) 16 B) 56 C) 33 D) 65 E) Ninguno

27. Un hombre gastó el año antepasado los $\frac{3}{8}$ de sus ahorros; el año pasado los $\frac{5}{12}$ de sus ahorros iniciales; este años $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba y aun tiene 400 Bs. ¿A cuánto asciende sus ahorros?

    A) 2500 Bs. B) 3800 Bs. C) 4500 Bs. D) 4800 Bs. E) Ninguno.

    Solución.

	Gasto	Le queda
Antepasado	$\frac{3}{8}x$	
Pasado	$\frac{5}{12}x$	

    en estos dos años gasta $\frac{3}{8}x + \frac{5}{12}x = \frac{19}{24}x$ y lo que le queda es $\frac{5}{24}x$, finalmente

	Gasto	Le queda
Este año	$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{24}x\right)$	$\frac{2}{5}\left(\frac{5}{24}x\right)$

    como aun le queda 400, esto es igual a: $\frac{2}{5}\left(\frac{5}{24}x\right) = 400$, sus ahorros fueron:

    $$x = 4800 \text{ Bs.}$$

28. Una sociedad de once personas iba a comprar un edificio que vale Bs. 214500, contribuyendo por partes iguales. Se suman otros amigos y deciden formar parte de la sociedad, con lo cual cada uno aporta Bs. 5200 menos que antes. ¿Cuántos amigos se sumaron a la sociedad?

    A) 15 B) 13 C) 2 D) 4 E) Ninguno

29. Seis amigos van a comprar un terreno a partes iguales. A última hora dos de ellos decisten y esto hace que cada uno de los otros tenga que aportar 500 Bs. más, ¿cuál es el valor del terreno?

    A) 3500 B) 4500 C) 5000 D) 6000 E) Ninguno

30. Jorge tenía Bs. 24 y René Bs. 32. Ambos ganaron una misma cantidad de dinero y la suma de lo que ttienen ambos ahora excede en Bs. 66 al cuádruplo de lo que ganó cada uno. ¿Cuánto ganó cada uno?

    A) 20 B) 10 C) 66 D) 33 E) Ninguno

31. Una piscina se puede llenar de agua mediante 2 grifos A y B de caudales constantes. Si se abre solamente el grifo A, la piscina se llena en 6 horas. Si se abre solo el grifo B, la piscin se llena en 3 horas. Si se abren simultáneamente los dos grifos, la iscina se llena de agua en:

    A) 120 min B) 144 min C) 72 min D) 80 min E) Ninguno

32. Dos obreros A y B trabajando juntos, deben hacer una obra en 7 días y medio pero a los tres días A cae enfermo y los mismo le ocurre a B, a los cinco días, quedando hecha la mitad de la obra, ¿en cuántos días lo hará el obrero A trabajando solo?

    A) 20 B) 12 C) 16 D) 14 E) Ninguno.

33. Los tiempos empleados por dos pintores para pintar cada metro cuadrado difieren entre sí en un minuto. Trabajando conjuntamente emplean una hora para pintar 27 metros cuadrados. En cuánto tiempo pinta cada uno un metro cuadrado.

    A) 5 y 6 min B) 4.5 y 5.5 min C) 4 y 5 min D) 6 y 7 min E) Ninguno

34. El encargado de la venta de entradas para una fiesta de un colegio divide las entradas en 3 clases: 400 en cada uno de los cursos A y B, y 200 en el curso C. El precio de una entrada del curso B es las $\frac{3}{4}$ partes del precio del curso A, y el precio de cada entrada del curso C es 50 centavos de boliviano menos que el precio de cada entrada del curso A. Si es Bs. 1340 el ingreso que se obtenga al vender todas las entradas, hállese la suma de los precios de las entradas de los 3 cursos.

    A) 3.70 B) 3.80 C) 3.90 D) 3.50 E) Ninguno

35. Hallar los números enteros cuyo triplo menos 6 sea mayor que su mitad más 4 y cuyo cuádruplo aumentado en 8 sea menor que su triplo aumentado en 15. ¿Cuánto es la suma de los números enteros hallados?

    A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) Ninguno

36. Una caja registradora contiene Bs. 50 en monedas de 5, 10 y 25 centavos. El total son 802 monedas, siendo 10 veces mayor el número de las de 5 centavos que el de las de 10 centavos. ¿Cuántas monedas hay de 5, 10 y 25 centavos?

    A) 700, 40 y 62 B) 700, 70 y 32 C) 600, 172 y 30 D) 500, 274 y 28 E) Ninguna

37. La suma de dos números es 3564, su razón, $\frac{4}{7}$. ¿Cuáles son los números?

    A) 2296 y 1268 B) 1296 y 2268 C) 2096 y 1468 D) 1968 y 1596 E) Ninguno

38. Una fábrica se gasta diariamente Bs. 4320, la mitad para los jornales de los hombres y la otra mitad para los jornales de las mujeres; entre hombres y mujeres existen 42 personas. Calcular el número de hombres y mujeres, sabiendo que el valor del jornal del hombre excede en Bs. 30 al jornal de la mujer.

    A) 18 y 24 B) 18 y 18 C) 18 y 26 D) 20 y 24 E) Ninguno

39. María dice a José: dame Bs. 18000 y así tendré el doble de dinero que tú, y José le contesta: lo justo es que tú me des Bs. 15000 y así tendremos cantidades iguales. ¿Cuánto tenía José?

    A) 48000 B) 114000 C) 84000 D) 96000 E) Ninguno

40. 300 trabajadores de una empresa deben cobrar Bs. 25200, pero como algunos de ellos son despedidos, el resto cobrará Bs. 140, cada uno. ¿Cuántos trabajadores fueron despedidos?

    A) 60 B) 80 C) 100 D) 120 E) Ninguno

41. Se compran dos piezas de tola que juntas miden 20 metros. El metro de cada pieza costó un número de Bs. igual al número de metros de la pieza. Si una pieza costó nueve veces lo que la otra, ¿cuál es la longitud de cada pieza?

    A) 10 y 10 B) 4 y 16 C) 5 y 15 D) 2 y 18 E) Ninguno

42. Juan vende 1000 libros y le quedan más de la mitad de los que tenía. Si luego vence 502 le quedan menos de 500. ¿Cuántos libros tenía al inicio?

    A) 2004 B) 2003 C) 2002 D) 2001 E) Ninguno

43. El número de días que ha trabajado Pedro es 4 veces el número de días que ha trabajado Enrique. Si Pedro hubiera trabajado 15 días menos y Enrique 21 días más, ambos habrían trabajado igual número de días. ¿Cuánto es la suma de los días que trabajaron cada uno?

    A) 60 B) 50 C) 70 D) 80 E) Ninguno

44. El lunes perdí Bs. 40; el martes gané Bs. 125; el miércoles gané el doble de lo que tenía el martes, y el jueves, después de perder la mitad de lo que tenía, me quedan Bs. 465 ¿cuánto tenía antes de empezar a jugar?

    A) 225 B) 255 C) 245 D) 253 E) Ninguno

45. Los $\frac{2}{5}$ de los ingresos de la junta de vecinos se emplea en combustibles, $\frac{1}{8}$ se emplea en electricidad, $\frac{1}{12}$ en la recogida de basura, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento

en las casas y el resto se emplea en limpieza. ¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?

A) $\frac{103}{20}$ B) $\frac{108}{120}$ C) $\frac{17}{120}$ D) $\frac{7}{120}$ E) Ninguno

46. Pedro le dice a Juan: Si me das 15 bolivianos tendré 5 veces de lo que te sobra; y Juan le dice a Pedro: Si tu me das 20 bolivianos tendré 3 veces de lo que te sobra. ¿Cuánto es la suma del dinero de ambas personas?

A) 60 Bs. B) 70 Bs. C) 50 Bs. D) 80 Bs. E) Ninguno

47. En una sesión de clase, antes del recreo el número de hombres es al número de mujeres como 9 es a 5. Si después del recreo, hay 8 hombres y 4 mujeres menos, con lo cual la razón de hombres a mujeres es 7 a 4. Hallar el número de mujeres que había antes del recreo.

48. ¿Cuántos alumnos faltaron a la clase de algebra, sabiendo que el número de los que faltaron es menor que 15, que disminuyendo dicho número es su mitad más 8, resulta igual a 4 veces su octava parte menos 2?.

A) 8 B) 4 C) 14 D) absurdo E) Indeterminado.

49. En una carretera de distancia 22.5 km, un ciclista avanza a 40 km/h, pero al llegar al tramo final, cambia su velocidad a 50 km/h, haciendo un tiempo total de 33 minutos. ¿Cuál es la longitud del tramo final?

A) 2500 m B) 1000 m C) 500 m D) 2000 m E) 1500 m.

50. Un comerciante adquiere 50 trajes y 35 pares de zapatos por 16000 bolivianos. Cada traje costó el doble de lo que costó cada par de zapatos mas 50 bolivianos. Hallar el precio de un traje y de un par de zapatos. Sol. Par de zapatos 100 bs. y traje 250 bs.

51. 6 personas iban a comprar una casa contribuyendo por partes iguales pero dos de ellas desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner 2000 bolivianos más. ¿Cuál era el valor de la casa? Sol. 24000 bs.

52. Tengo 1.85 $ en monedas de 10 y 5 centavos. Si en total tengo 22 monedas, ¿Cuántas son de 10 centavos y cuántas de 5 centavos?.

53. 5 personas han comprado una tienda contribuyendo por partes iguales. Si hubiera habido 2 socios más, cada uno hubiera pagado 800 bolivianos menos. ¿Cuánto costo la tienda? Sol. 14000 bs.

54. En cada día, de lunes a jueves, gané 6 $ más que lo que gané el día anterior. Si el jueves gané el cuadruplo de lo que gané el lunes, ¿cuánto gané cada día? Sol. Lunes 6 $, Martes 12 $, miércoles 18 $ y jueves 24 $.

55. Si un padre tiene ahora dos años más que la suma de las edades de sus dos hijos juntos y hace 8 años tenía 3 veces la edad del hijo menor y dos veces la del mayor. Actualmente la edad del hijo mayor es: A) 23 años B) 28 años C) 16 años D) 38 años E) Ninguno.

56. Un recipiente contiene 16 litros de una mezcla que tiene 20 % de antióxido. Se desea sacar una parte de la mezcla y reemplazarla por antióxido puro con el fin de elevar el porcentaje de antióxico en la mezcla a 25 %. Entonces la cantidad (en litros) que debe reemplazarse es: A) 15 B) 10 C) 5 D) 1 E) Ninguno.

57. Tres ciclistas arrancan juntos en una carrera en que la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo tarda 11 segundos en dar una vuelta a la pista y el tercer ciclista tarda 12 segundos en dar una vuelta a la pista. ¿Luego de cuántos segundos pasarán juntos por vez primera por la línea de salida?

    A) 90 B) 420 C) 180 D) 660 E) Ninguno

58. Una piscina se puede llenar de agua mediante 2 grifos A y B de caudales constantes. Si se abre solamente el grifo A, la piscina se llena en 6 horas. Si se abre solo el grifo B, la piscina se llena en 3 horas. Si se abren simultáneamente los dos grifos, la piscina se llena de agua en

    A) 120 minutos B) 144 minutos C) 72 minutos D) 80 minutos E) Ninguno.

59. Un tren recorre 420 kilómetros en cierto tiempo (en horas). En la segunda vez recorre la misma distancia en 30 minutos menos, por haber aumentado su velocidad en 20 kilómetros por hora. En que tiempo (en horas) recorrió la distancia en la primera vez.

    A) 3,5 B) 2,5 C) 1,5 D) 4,5 E) Ninguno.

60. Un número de tres cifras es tal que la cifras de las decenas es la mitad de las centenas, también la cifra de la centena es igual a la diferencia entre la cifra de las unidades y la cifra de las decenas, por último la cifra de las unidades es igual a nueve. Hallar la suma de los dígitos de este número.

    A) 18 B) 16 C) 12 D) 14 E) Ninguno.

61. Un recipiente contiene 16 litros de una mezcla que tiene 20 % de anticongelante. Se desea sacar una parte de la mezcla y reemplazarla por anticongelante puro con el fin de elevar el porcentaje de anticongelante en la mezcla al 25 %. La cantidad de la mezcla (en litros) que debe reemplazarse es:

    A) 1 B) 5 C) 10 D) 15 E) Ninguno.

62. Un depósito puede llenarse por un tubo en dos horas y por otro tubo en tres horas y vaciarse por uno de desague en cuatro horas. El depósito se llenará con los tres tubos abiertos en:

    A) $\frac{12}{7}$ h B) $\frac{30}{9}$ h C) $\frac{60}{23}$ h D) $\frac{60}{17}$ E) Ninguno.

63. La suma de todos los enteros de dos cifras mayores que 67, tal que al ser divididos por 6 den residuo 4, es igual a:

    A) 532 B) 630 C) 474 D) 584 E) Ninguno.

64. Una bolsa contiene 255 bolivianos en monedas de 2 y 5 bolivianos. Sabiendo que hay 19 monedas más de 2 bolivianos que de 5 bolivianos, determinar el número de monedas de 5 bolivianos en la bolsa.

    A) 30 B) 29 C) 28 D) 31 E) Ninguno.

65. Si al dividendo de una división se aumenta 100 unidades, el cociente y el residuo aumentan en 4 y 8 unidades respectivamente. Determinar el valor del divisor.

    A) 428 B) 248 C) 842 D) 498 E) Ninguno.

66. El máximo común divisor de dos números es 12 y su mínimo común múltiplo es 420. Si la diferencia de ambos números es menor que 30. El valor de uno de los números es:

    A) 84 B) 48 C) 70 D) 66 E) Ninguno.

67. Una guarnición de 500 hombres, tiene víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias tomara cada hombre si se quiere que los víveres duren 5 días más?

    A) $\frac{15}{7}$ B) $\frac{16}{5}$ C) $\frac{18}{7}$ D) $\frac{12}{5}$ E) Ninguno.

68. Una persona por cada 100 huevos que compra se le rompen 10 huevos y por cada 100 huevos que vende regala 10 huevos. Si vendió 1800 huevos. ¿Cuántos huevos ha comprado?

    A) 2400 B) 2100 C) 2200 D) 2300 E) Ninguno.

69. La diferencia de dos números es 40 y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11. Hallar los números.

    Solución. Sea x el primer número y y el segundo número, según las condiciones del problema:

    $$\begin{cases} x - y = 40 \\ \frac{1}{8}(x+y) = 11 \end{cases}$$

    , Solution is: $[x = 64, y = 24]$

70. La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Hallar los números.

71. La suma de dos números es 1529 y su diferencia 101. Hallar los números.

72. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.

73. los $\frac{2}{3}$ de la suma de dos números son 74 y los $\frac{3}{5}$ de su diferencia 9. Hallar los números.

74. Los $\frac{3}{10}$ de la suma de dos números exceden en 6 a 39 y los $\frac{5}{6}$ de su diferencia son 1 menos que 26. Hallar los números.

75. Un tercio de la diferencia de dos números es 11 y los $\frac{4}{9}$ del mayor equivalen a los $\frac{3}{4}$ del menor. Hallar los números.

76. Dividir 80 en dos partes tales que los $\frac{3}{8}$ de la parte mayor equivalgan a los $\frac{3}{5}$ de la menor.

77. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a $\frac{7}{3}$ del menor en 232 y 5 veces el menor exceda a $\frac{1}{5}$ del mayor en 66.

78. 5 trajes y 3 sombreros cuestan 4180 Bs. y 8 trajes y 9 sombreros 6940. Hallar el precio de un traje y de un sombrero.

79. Un hacendado compro 4 vacas y 7 caballos por \$514 y más tarde, a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por \$818. hallar el costo de una vaca y de un caballo.

80. En un cine, 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan \$5.12 y 17 de niño y 13 de adulto \$8.31. Hallar el precio de una entrada de niño y una de adulto.

81. Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruplo del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.

82. El largo de un patio rectangular tiene tres metros más que el ancho. Si el área es igual a 54 metros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones del patio?,

    Solución. Al igual que en las ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales, se plantea la ecuación que corresponde al problema tomando en cuenta las variables que presenta, luego se resuelve la ecuación por el método más conveniente. Ancho a, largo $l = a + 3$, el área es

$$\begin{aligned} l \times a &= 54 \\ (a+3)\,a &= 54 \end{aligned}$$

    de donde $a_1 = -9$ y $a_2 = 6$, de estas dos respuestas, a_1 es falsa, ya que no puede haber un ancho negativo, la solución correcta es que el ancho mida 6 metros y el largo $l = a + 3 = 9$ metros.

83. Juan dispone de Bs. 900 para comprar textos. Si consigue una rebaja de 5 bolivianos en cada texto, podría comprar 6 textos más. ¿Cuál es el precio de cada uno y cuántos textos compra?

    Solución. Precio inicial $p_1 = \dfrac{900}{n}$, precio rebajado $p_2 = \dfrac{900}{n+6}$, por la condición del problema

    $$p_2 = p_1 - 5$$

    esto es

    $$\frac{900}{n+6} = \frac{900}{n} - 5$$

    resolviendo la ecuación $n_1 = -36$ y $n_2 = 30$. Se compra 30 libros a razón de $\dfrac{900}{30} = 30$ bolivianos.

84. El largo de un cartel de publicidad es dos metros más que el ancho. Si se aumenta el largo en tres metros y el ancho en dos, la superficie de la tela es el doble que la anterior. Determinar las dimensiones de la tela.

    Solución. El área del cartel es la, según las condiciones del problema

    $$(l+3)(a+2) = 2la$$

    como el largo del cartel es dos metros más que el ancho, esto es

    $$l = a + 2$$

    reemplazando

    $$(a+5)(a+2) = 2(a+2)a$$

    resolviendo encontramos que $a_1 = 5$ y $a_2 = -2$. El ancho de la tela es de 5 metros y el largo 7 metros.

85. La diferencia entre lo que tiene Carlos Quispe y lo que tiene Carlos Mamani es de Bs. 120. Si Carlos Quispe ganaría Bs. 10 tendría el doble de lo que tiene Carlos Mamani. ¿Cuánto tiene cada uno?

86. Cuando Javier y Fernando empezaron a jugar cartas, Javier tenía Bs. 180 más que Fernando. Cuando Javier había perdido Bs. 160 de su dinero, Fernando tenía el doble de lo que le quedaba a Javier. ¿Con cuánto dinero empezó a jugar cada uno?

87. Ayer, el número de caballos que tenía en mi hacienda era 4 veces el número de vacas. Hoy compré 5 caballos y 5 vacas, y el número de caballos es el triple del número de vacas. ¿Qué cantidad de caballos y vacas hay en mi hacienda?

88. El monto de dinero que tiene Marcela es el doble del que tiene Verónica. Si Marcela le da a Verónica Bs. 20 tendría los $\dfrac{4}{5}$ de lo que tiene ahora Verónica. ¿Cuánto dinero tiene cada una?

89. Las edades de dos amigas, María y Rosa, están en la relación de 5 a 4 y hace 5 años la relación de edades era de 9 a 7. ¿Qué edad tiene cada una?

90. Por la compra de una docena de naranjas, una docena de mandarinas y una de plátanos, se cancela Bs. 13. Con lo que se paga por una docena de naranjas se puede comprar una docena de mandarinas y media de plátanos; lo que se paga por 3 docenas de mandarinas equivale a lo que se paga por 2 docenas de naranjas y 1 docena y media de plátanos. ¿Cuál es el precio de la docena de cada fruta?

91. Entre Ximena, Yomara y Zoila tienen Bs. 230. Si Zoila le da a Yomara Bs. 10, ambas tendrían igual cantidad y lo que tiene Zoila es el doble de lo que tiene Ximena. ¿Cuánto tiene cada una?

92. El cuadrado de la longitud de la diagonal de una habitación rectangular es 52 m^2. El largo de la habitación es dos metros más que el ancho. Calcula el área y el perímetro de la sala.

93. Se arma una caja con varillas de hierro en todos los bordes. Para armar las bases se requieren 48 m lineales, para las caras laterales se requieren 36 m lineales y para las caras frontal y posterior se requiere 24 m lineales. Hallar las dimensiones que va a tener la caja y el volumen de azúcar que podría contener.

94. Por la compra de un radio, un televisor y un reproducto se pagó $us. 340. El precio de la tele es el doble del precio de la radio, pero faltarían $us. 20 para igualar al precio del radio y del reproductor a la vez. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

95. El promedio anual de Yomara en matemática es 55. Si en el segundo trimestre ha aumentado su nota en 8 puntos con relación al primero y en el tercer trimestre tiene 5 puntos más que en el segundo, ¿cuál es su nota en cada trimestre?

96. Entre el primero, segundo y tercero de secundaria han reunido Bs. 360 en una colecta para ayudar a los ancianos de un asilo. Entre el primero y el segundo curso se reunió Bs. 285, lo reunido por el segundo es igual a lo que reunieron juntos el primero y el tercero. ¿Cuánto ha recolectado cada curso?

    Solución. Del problema podemos decir:

$$\begin{cases} p+s+t=360 & (1) \\ p+s=285 & (2) \\ s=p+t & (3) \end{cases}$$

    , Solution is: $[p=105, s=180, t=75]$

Capítulo 14

BINOMIO DE NEWTON

1. Determinr el término central del binomio:

$$\left(\sqrt{y} - \frac{1}{y^3}\right)^8$$

A) $70y^{10}$ B) $70y^{-10}$ C) $60y^{10}$ D) $60y^{-10}$ E) Ninguno

2. Hallar el coeficiente de x^3 del siguiente polinomio $\left(x^4 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

A) 202 B) 220 C) 204 D) 224 E) Ninguno

3. Hallar el coeficiente del término que contiene x^{12} de:

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$$

A) 1375 B) -1365 C) 1365 D) -1375 E) Ninguno

4. Hallar el término independiente de:

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$$

A) $\dfrac{7}{18}$ B) $\dfrac{18}{7}$ C) $\dfrac{7}{15}$ D) $\dfrac{7}{17}$ E) Ninguno

5. Hallar el término que no contenga x y y en el desarrollo del siguiente binomio:

$$\left(\frac{2x^3}{y^2} + \frac{y^4}{4x^6}\right)^{12}$$

A) 481 B) 792 C) 395 D) 495 E) Ninguno

6. El coeficiente del término central en el desarrollo del binomio de $(x-y)^8$ es:

   A) 50 B) 30 C) 80 D) 70 E) Ninguno

7. El coeficiente numérico del término x^3y^4 en el desarrollo del binomio $(2x+y)^7$ vale.

   A) 280 B) 2835 C) 4480 D) 8960 E) Ninguno

8. El quinto término del desarrollo del binomio:

$$(a+b)^5$$

   es:

   A) $9a^5b$ B) $12a^4b^2$ C) $5aa^3b^3$ D) 15^2b^4 E) Ninguno

9. El número de términos en el desarrollo del binomio $(x+2)^n$, para que los términos de lugares 10 y 11, tengan coeficientes iguales es:

   A) 19 B) 15 C) 14 D) 16 E) Ninguno

10. El coeficiente numérico del término x^3y^4 en el desarrollo del binomio $(2x+y)^7$ vale:

   A) 280 B) 2835 C) 4480 D) 8960 E) Ninguno.

   Solución. **Primer método**. Aplicando el Triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{cccccccccl}
1 & & & & & & & & = (a+b)^0 \\
1 & 1 & & & & & & & = (a+b)^1 \\
1 & 2 & 1 & & & & & & = (a+b)^2 \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & & = (a+b)^3 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & = (a+b)^4 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & = (a+b)^5 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & = (a+b)^6 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & = (a+b)^7
\end{array}$$

   por lo tanto el desarrollo de

$$(2x+y)^7 = (2x)^7 + 7(2x)^6 y + 21(2x)^5 y^2 + 35(2x)^4 y^3 + 35(2x)^3 y^4 + \cdots$$

   el desarrollo de x^3y^4, es

$$35(2x)^3 y^4 = 280x^3y^4,$$

   el número buscado es

$$\boxed{280}$$

   Segundo método. Aplicando el Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Reemplazando:

$$(2x+y)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{n}{k} (2x)^{n-k}\, y^k$$

de donde nuestro desarrollo

$$\binom{7}{4} (2x)^3\, y^4 = \frac{7!}{4! \times (7-4)!} (8)\, x^3 y^4 = 280x^3 y^4$$

el número buscado es

$$\boxed{280}$$

11. Determinar el término independiente del siguiente binomio:

$$\left(2x^3 + \frac{1}{4x^8}\right)^{15}$$

A) 29210 B) 29102 C) 29120 D) 29122 E) Ninguno

12. Calcular el lugar que ocupa el término de grado absoluto 21 en el desarrollo de $\left(x^3 + y^2\right)^9$.

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) Ninguno

13. Hallar el término independiente de $x; y$ en el desarrollo de $\left(\dfrac{2x^3}{y^2} - \dfrac{y^4}{4x^6}\right)^{12}$.

A) 485 B) 495 C) -485 D) -495 E) Ninguno

14. Calcular el coeficiente del término que contiene x^7 del desarrollo de: $\left(2x^3 - \dfrac{1}{2x}\right)^9$

A) 63 B) -63 C) 45 D) -45 E) Ninguno

15. Hallar el término central del desarrollo de: $\left(x^2 y + x^{-1} y^{-2}\right)^8$

A) $70x^4y^4$ B) $70x^4y^{-4}$ C) $70x^{-4}y^4$ D) $50y^4y^4$ E) Ninguno

16. En el siguiente binomio determinar el coeficiente del término que contiene y^4: $\left(y^3 + \dfrac{1}{y}\right)^{12}$.

A) 792 B) 782 C) 495 D) 485 E) Ninguno

17. ¿Cuál es el número de términos en el desarrollo de: $\left(\dfrac{n}{8}x + y\right)^n$ si los coeficientes de los lugares 7 y 8 son iguales?

A) 49 B) 48 C) 50 D) 47 E) Ninguno

18. El binomio $\left(a^2+b^2\right)$ al ser elevado a cierta potencia, contiene en su desarrollo en el término $k-$ésimo: $a^{18}b^4$. ¿De qué grado respecto a a es el término $k+6$?

    A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Ninguno

19. Encontrar el coeficiente del término que contengan x^9 en el desarrollo de: $\left(x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

    A) 210 B) 220 C) -210 D) -220 E) Ninguno

20. Hallar el coeficiente del término que contenga a^5 de: $\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}}-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^{20}$.

    A) -9690 B) 4230 C) -4230 D) 9690 E) Ninguno

21. Hallar el término independiente de: $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$.

    A) $\frac{5}{18}$ B) $-\frac{7}{18}$ C) $-\frac{5}{18}$ D) $\frac{7}{18}$ E) Ninguno

22. En el desarrollo de $\left(2+3x^2\right)^n$, el coeficiente de x^{24} es 4 veces el coeficiente de x^{22}. Calcular el valor de n.

    A) 23 B) 33 C) 43 D) 53 E) Ninguno

23. Determine el término central del binomio: $\left(\sqrt{y}-\frac{1}{y^3}\right)^8$.

    A) $70y^{10}$ B) $70y^{-10}$ C) $60y^{10}$ D) $-60y^{10}$ E) Ninguno

14.1. POTENCIACION

1. Simplificar y determinar el valor de R

$$R=\frac{4^{\frac{2a}{a-b}}+12\times 4^{\frac{2b}{a-b}}}{\sqrt[a-b]{4^{a+b}}}$$

    A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) Ninguno

2. El valor de la siguiente expresión algebraica es:

$$\frac{31\sqrt{2+\sqrt{1{,}75}}}{\sqrt{16+\sqrt{15{,}75}}}-\frac{28}{\sqrt{63}+\sqrt{7}}$$

    A) 6 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$ D) 10 E) Ninguno

3. Calcular el valor de:

$$E=\frac{\left(\sqrt[5]{25}\right)^{3}\left(\sqrt[15]{5}\right)\left(\sqrt[3]{25}\right)}{\sqrt[3]{5}\,\sqrt[5]{125}}$$

A) 25 B) 5 C) $\sqrt[3]{5}$ D) $\sqrt[5]{5}$ E) Ninguno

4. Al simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{n^2}{c^2}}}+\frac{\dfrac{n^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}-\left(1-\frac{n^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

el resultado es:

A) 1 B) 2 C) $\left(1-\dfrac{n^2}{c^2}\right)^{-\dfrac{3}{2}}$ D) $\left(1-\dfrac{n^2}{c^2}\right)^{\dfrac{3}{2}}$ E) Ninguno

5. Si se simplifica la expresión:

$$\frac{\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}-2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}-\sqrt{\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{2}}}{\left[\dfrac{\sqrt{\left(2-\dfrac{3}{4}\right)+5}+5}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}-1}\right]^{-1}}$$

A) $-\dfrac{1}{108}$ B) $-\dfrac{121}{12}$ C) $-\dfrac{12}{121}$ D) 108 E) Ninguno

6. Resolver la siguiente expresión:

$$\frac{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{2}}{\left(3-\dfrac{2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}\div\frac{\left(\dfrac{6}{7}\times\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{7}\div\dfrac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\div\dfrac{1}{5}\right)}-5\tfrac{1}{7}$$

A) $\dfrac{6}{7}$ B) $\dfrac{7}{6}$ C) $-\dfrac{6}{7}$ D) $-\dfrac{7}{6}$ E) Ninguno

7. Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^2}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}} \div \frac{\left(\frac{6}{7}\times\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\div\frac{1}{5}\right)} - 5\tfrac{1}{7}$$

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{8}{7}$ E) Niguno

8. El resultado de reducir la expresión:

$$\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}-\frac{1}{6}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{8}\right)^0+\frac{1}{8}}} \times \frac{10}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\frac{2}{3}}}$$

A) 3 B) $-3i$ C) -3 D) $3i$ E) Ninguno

9. Si se reduce la expresión: $\sqrt[n]{\frac{8^{n+1}}{4^{n+1}+2^{2n+2}}}$, el resultado es:

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) Ninguno

10. Simplificar la sigiente expresión

$$\sqrt[3]{\frac{\frac{\frac{15}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{20}}\div\frac{71}{3}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}+\left(\frac{1}{429}\right)^{-1}}$$

A) -3 B) 3 C) -9 D) 9 E) Ninguno

11. Simplificar la siguiente expresión

$$\left[\frac{5^{n^2+3}-5^{n^2+2}+5^{n^2+1}}{5^{n^2+2}-5^{n^2}}\right]^{-1}$$

A) $-\frac{8}{35}$ B) $-\frac{35}{8}$ C) $\frac{35}{8}$ D) $\frac{8}{35}$ E) Ninguno

12. Hallar el valor numérico de

$$P=\sqrt{\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}\times b^{0,5}}{a^{\frac{1}{4}}\times b^{0,2}}\right)^{-2}} \div \sqrt{\left(\frac{a^{\frac{1}{5}}\times b^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[5]{a}}\right)^{-1}}$$

sabiendo que $a = \sqrt[7]{5^{12}}$ y $b = \sqrt[7]{10^{15}}$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) Ninguno

13. El valor de la expresión

$$E = \frac{\left(5\frac{7}{36} - 4\frac{1}{18} + 1\frac{1}{72}\right) \times 36}{78 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{10}{3} + \frac{28}{6}}{5 - 3}$$

donde $5\dfrac{7}{36}$, etc. son números mixtos) es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Ninguno.

14. El valor simplificado de la siguiente expresión

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+1]{2^n \cdot 4}}}$$

es:

A) 3 B) 9 C) 1 D) 2 E) Ninguno

Capítulo 15

RADICACION

1. Simpliciar:

$$E = \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[9]{x^4} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{x^{-3}}{x^2}}\right)^{-9}}{\left(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x^{-5}}\right)^{-2}}$$

A) x^{-4} B) x C) x^{-7} D) x^{-9} E) Ninguno

2. Simplificar:

$$E = \sqrt[5]{\left(\frac{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5} \cdot a^{-3} \cdot \sqrt[3]{a^{-3}}}\right)^{-2}}$$

A) a^2 B) a^{-2} C) a^3 D) a^{-3} E) Ninguno

3. Encontraer el valor de:

$$\left(\frac{\left(\sqrt[5]{25}\right)^3 \left(\sqrt[15]{5}\right) \left(\sqrt[3]{25}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right) \left(\sqrt[3]{125}\right)}\right)^{-5}$$

A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $\frac{2}{125}$ D) $\frac{1}{125}$ E) Ninguno

4. Encontrar el valor de:

$$Q = \frac{4^{\frac{2a}{a-b}} + 16 \cdot 4^{\frac{2b}{a-b}}}{\sqrt[a-b]{4^{a+b}}}$$

A) 4 B) 3 C) 8 D) 5 E) Ninguno

15.1. ECUACIONES

1. Encontrar el valor de x en la ecuación

$$2^{x-1} \cdot 4^{2x+3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{16}\right)^{-5x}}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Ninguno

2. Hallar la suma de las soluciones de la ecuación:

$$\frac{3^{x^2+4x}}{9 \cdot 3^{3x}} = \frac{81}{9^{-x-3}}$$

A) -1 B) 1 C) 3 D) 2 E) Ninguno

3. Hallar el valor de $E = \dfrac{x^2+6}{x}$, para el valor de x que verifique a la ecuación

$$4^{x+2} + 4^{x+4} + 4^{x+5} = 81$$

A) -4 B) -6 C) -2 D) -5 E) Ninguno

4. Determinar el valor de x en: $\dfrac{6^{2x-2}}{144^{x-1}} = \dfrac{1}{16}$

A) 4 B) 2 C) 7 D) 3 E) Ninguno

5. Resolver: $3^{16x+1} + 9^{8x-1} = 252$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) Ninguno

15.2. RACIONALIZACION

1. Racionalizar, luego simplificar y determine el valor de la expresión irracional cuando $x = 5$.

$$Z = \frac{2x^2 - 50}{\sqrt{3x-14} - \sqrt{x-4}}$$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) Ninguno

2. Racionalizar, simplificar y luego halle el valor de la expresión cuando $x = -1$.

$$E = \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2+8} + 3x}$$

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) Ninguno

3. Racionalizar, simplificar y hallar el valor de la expresión:

$$E = \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2}$$

para $x = 3$.

A) 24 B) 32 C) 54 D) 44 E) Ninguno

4. Simplificar la expresión:

$$E = \frac{\sqrt[5]{a^2} + 2\sqrt[5]{a} + 1}{\left(\sqrt[5]{a}^2 + \sqrt[5]{a} + 1\right)\left(\sqrt[5]{a}^3 - \sqrt[5]{a}^2 + 1\right) - a} - \sqrt[5]{a} + 1$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) -2 E) Ninguno

5. Racionalizar y luego simplificar:

$$E = \frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1\right)}{x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} + 1}$$

A) $2 + \sqrt[3]{x}$ B) $\sqrt[3]{x} + 1$ C) $\sqrt[3]{x} - 1$ D) $x + 1$ E) Ninguno

Capítulo 16

FUNCIONES

Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje; la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen; la distancia recorrida por un objeto puede depender del tiempo transcurrido desde que salió de un punto específico; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de su temperatura; la resistencia de un cable eléctrico de longitud fija depende de su diámetro, etc. La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una *función.*

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y donde el número y es único para cada valor específico de x.

En la figura se muestra la representación de una correspondencia de este tipo. Se puede establecer el concepto de función de otra manera: considere intuitivamente que el número real y del conjunto Y es una función del número x del conjunto X, si existe una regla mediante la cul se asocia un solo valor de y a un valor de x. Esta regla se expresa fundamentalmente por medio de una ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2$$

define una función para la cual X es el conjunto de todos los números reales y Y es el conjunto de los números no negativos. El valor de y asignado al valor de x se obtiene al multiplicar x por sí mismo. La tabla proporciona algunos de estos valores y la figura ilustra la correspondencia de los números de la tabla.

Para denotar funciones se utilizan símbolos como f, g y h. El conjunto X de los números reales indicado anteriormente es el *dominio* de la función y el conjunto Y de números reales asignados los valores de x en X es la *rango* de la función.

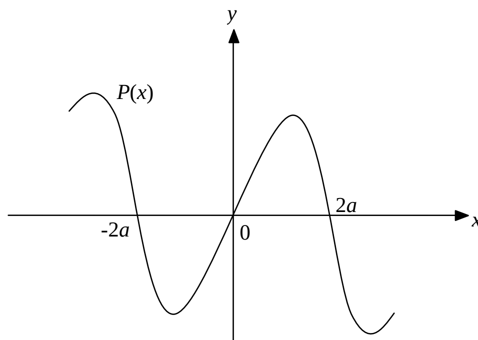
Relación. Se llama así a cualquier conjunto de coordenadas (x, y).

Dominio. En un conjunto coordenado el primer valor (abscisa) indica el dominio de la relación.

Rango. En un conjunto de coordenadas, el segundo valor (ordenada) indica el rango de la relación.

Función. Es una relación donde para cada valor de x existe un solo valor de y.

1. En la figura se muestra la gráfica del polinomio cúbico $p(x)$.



sabiendo que $P(a) = 20$, halle $\sqrt{P(-3a)}$.

Solución. Del gráfico, las raíces son $-2a$, 0 y $2a$, entonces

$$P(x) = k(x + 2a)\,x\,(x - 2a)$$

evaluamos para $P(20)$, hallamos que $k = -\dfrac{20}{3a^3}$

$$P(x) = -\frac{20}{3a^3}x\left(x^2 - 4a^2\right)$$

similarmente para $x = -3a$

$$P(-3a) = 100$$

Aplicando raíces a ambos miembros:

$$\sqrt{P(-3a)} = 10$$

2. En el polinomio $P(x) = mx^2 + mx + 2$, se verifica $P(1) = 3P(-1)$. Calcular $P(m+1)$

A) 22 B) 24 C) 26 D) 20 E) Ninguno

3. Si intersectamos las gráficas que representan a las funciones definidas en el conjunto de los números reales positivos mas el cero $\left(R_0^+\right)$, definidas por: $y = x - 1$ y $x^2 + y^2 = 13$; la suma de las coordenadas es:

A) 5 B) -5 C) 1 D) -1 E) Ninguno

4. La función y que indica la cantidad de libros que desean comprar los lectores a un precio x está dada por $y = f(x) = 36 - \frac{x^2}{4}$; por tanto, los compradores no comprarán ningún libro cuando el precio es:

   A) 15 B) 10 C) 14 D) 12 E) Ninguno

5. Sea la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde $f(2) = 6$, $f(0) = 4$ y $f(-1) = 7$. Hallar $a + b + c$.

   A) $\frac{11}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{13}{3}$ E) Ninguno

6. El dominio de la relación $xy^2 - x + 3y^2 + 1 = 0$, es:

   A) $\{x \in R / x < -3 \vee x \geq 1\}$ B) $\{x \in R / x \leq -3 \vee x > 1\}$ C) $\{x \in R / x > -3 \vee x \leq 1\}$ D) $\{x \in R / x < 3 \vee x > -1\}$ E) Ninguno

7. Si $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$, hallar $g\left(\frac{a}{a+1}\right)$

   A) $\sqrt{-(a+1)}$ B) $\sqrt{a+1}$ C) $\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ D) $\frac{a}{a+1}$ E) Ninguno

8. Sea la función $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$. El rango de dicha función es:

   A) $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ B) $]-2; +\infty[$ C) $]-\infty; -2[$ D) $]-\infty; -2[\cap]-2; +\infty[$ E) Ninguno

9. Con las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 1 - \frac{3}{x}$, hallar la función compuesta $f[g(a)] = \frac{1}{a}$.

   A) $a = \frac{1}{2}$ B) $a = -2$ C) $a = 2$ D) $a = -\frac{1}{2}$ E) Ninguno

10. Determinar el valor de verdad de las afirmaciones:

    a) Si $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para toda función f.

    b) Si $f(x) = \frac{3}{ax - 4}$; $x \in [-2; 4\rangle \Rightarrow f$ es una función sobreyectiva sobre $x \in [-2, 2\rangle$.

    c) Toda función impar es univalente.

    Solución. (a) Verdadero. Del enunciado, si:

    $$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

    (b) Falso, sea:

    $$f(x) = \frac{3}{ax - 4} : x \in [2, 4\rangle$$

analizando para que valores de x no está definida la función, es decir si:

$$ax - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{a}$$

En $x = \frac{4}{a}$, se crea una asíntota vertical. Si $x > 0$:

$$Dom\ f(x) = \left[-2; \frac{4}{a}\right\rangle \cup \left\langle\frac{4}{a}, 4\right\rangle$$

Graficando:

16.1. FUNCIONES CUADRATICAS

1. Considere la función $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$, con x en los números reales. El menor valor que alcanza la función es:

   A) 5 B) 3 C) 2 D) 0 E) -1.

Hallar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

1. $f(x) = x^2 + 6x + 8$
2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
3. $f(x) = x^2 + 7x - 2$
4. $f(x) = 4x^2 + 3x - 22$
5. $f(x) = -x^2 - 8x + 65$
6. $f(x) = -x^2 - 4x + 5$
7. $f(x) = 8x^2 - 2x - 3$
8. $f(x) = 6x^2 + 11x - 10$
9. $f(x) = -2x^2 - 5x + 18$
10. $f(x) = -3x^2 - 4x - 1$
11. $f(x) = -2x^2 - 3x + 1$

Graficar cada una de las siguientes funciones cuadráticas y determinar el dominio y rango; como el valor máximo y mínimo

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^2$
2. $f(x) = -2x^2$

3. $f(x) = 4x^2$
4. $f(x) = -4x^2$
5. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$
6. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^2$
7. $f(x) = -\dfrac{3}{2}x^2$
8. $f(x) = x^2 - 3x$
9. $f(x) = -x^2 + 3x$
10. $f(x) = x^2 - 3$
11. $f(x) = -x^2 + 3$

Capítulo 17

PROGRESIONES

Serie, es una sucesión de términos formados de acuerdo con una ley. Así 1, 3, 5, 7, ... es una serie cuya ley es que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior: 1 2, 4, 8, ... es una serie cuya ley es que cada término se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

Las series que estudiaremos en algebra elemental son las progresiones.

Las progresiones se clasifican en *Progresiones Aritméticas* y *Progresiones Geométricas*.

17.1. PROGRESIONES ARITMETICAS

Progresión aritmética es toda serie en la cual cada término después del primero se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante *razón* o *diferencia*.

En toda progresión aritmética la *razón* se halla restándole a un término cualquiera el término anterior.

Así, en $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, la razón es $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

17.1.1. TERMINO ENESIMO

Sea a_1 el primer término de una sucesión aritmética de razón r. La fórmula del término general está dado por:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ \vdots &= \vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)\,r \end{aligned}$$

Aquí vemos que cada término es igual al primer término de la progresión y más tantas veces la razón como términos le preceden; luego, como esta ley se cumple para todos los términos, tendremos que a_n será igual al primer término a_1 más tantas veces la razón como términos le preceden, y como a_n es el término enésimo, le preceden $n-1$ términos; luego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r$$

17.1.2. SUMA DE LOS TERMINOS

La expresión de la suma de n términos de una progresión aritmética, está dado por:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) r$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar la suma de los 40 primeros términos de la siguiente progresión aritmética:

   $$-3, 1, 5, ...$$

   A) 6900 B) 3000 C) 6000 D) 3900 E) Ninguno

2. La suma de los 5 primeros términos de una progresión aritmética creciente es igual a -5 y la suma de los cuadrados de los cinco primero términos es igual a 45. Determinar el primer término.

   A) 1 B) -5 C) -2 D) -3 E) Ninguno

3. Un comerciante ha ganado durante cuatro años una suma de 36000 pesos, en cada año ganó la mitad de lo ganado en el año anterior. ¿Cuánto ganó el primer año?

   A) 1960 B) 1620 C) 1000 D) 1920 E) Ninguno

4. La suma de los 11 términos de una progresión aritmética creciente es 176. La diferencia de los extremos es 30. ¿Cuál es el último término?

   A) 20 B) 25 C) 31 D) 32 E) Ninguno

5. La suma de todos los enteros de dos cifras mayores que 67, tal que al ser divididos por 6 den residuo 4, es igual a:

   A) 532 B) 630 C) 474 D) 584 E) Ninguno

6. La cantidad de números naturales n que satisfacen la relación $2^9 \leq n \leq 2^{10}$ es

   A) 256 B) 257 C) 512 D) 513 E) Ninguno

7. La suma de los números pares comprendidos entre 49 y 201 (puede considerarla como la suma de los términos de una progresión), vale

   A) 9652 B) 9500 C) 9348 D) 9196 E) Ninguno

8. Hallar el 17° término de la progresión

$$-8, 2, 12, ...$$

Solución. Dada la fórmula del término enésimo

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r$$

donde $n = 17$, $a_1 = -8$, $r = 2 - (-8) = 10$, reemplazando

$$a_{17} = -8 + (17-1)\, 10$$

entonces

$$\boxed{a_{17} = 152}$$

9. El 15° término de una progresión aritmética es 20 y la razón $\frac{2}{7}$. Hallar el primer término.

Solución. De la fórmula del término enésimo despejamos el a_1:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \Rightarrow a_1 = a_n - (n-1)\, r$$

reemplazando los datos del problema:

$$a_1 = 20 - (15-1)\, \frac{2}{7}$$

entonces

$$a_1 = 16$$

10. Hallar la razón de la progresión aritmética

$$3, ..., 8$$

donde 8 es el 6° término.

Solución. De la fórmula del término enésimo, despejamos la razón

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \Rightarrow r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

reemplazando los datos

$$r = \frac{8-3}{6-1}$$

entonces

$$\boxed{r = 1}$$

11. ¿Cuántos términos tiene la progresión

$$4, 6, ..., 30?$$

Solución. De la fórmula del término enésimo, despejamos el número de términos

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

reemplazando los datos $a_1 = 4$, $a_n = 30$, $r = 6 - 4 = 2$

$$n = \frac{30 - 4 + 2}{2}$$

entonces

$$n = 14$$

12. Hallar la suma de los 8 primero términos de

$$15, 19, 23, ...$$

Solución. De la fórmula de la suma de términos:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} r$$

reemplazando los datos $a_1 = 15$, $r = 19 - 15 = 4$, $a_8 = a_1 + (n-1)\,r = 15 + (8-1)\,4$, entonces $a_8 = 43$

$$S = \frac{15 + 43}{2}\,(4)$$

entonces

$$\boxed{S = 116}$$

13. Interpolar 3 medios aritméticos entre 3 y 11.

Solución. De lo que se trata es hallar

$$3,\ a_2,\ a_3,\ a_4, 11$$

El problema es hallar la razón de esta progresión cuyo número de términos es $n = 5$, $a_1 = 3$ y $a_5 = 11$, reemplazando

$$r = \frac{a_5 - a_1}{n-1} = \frac{11 - 5}{5 - 1}$$

esto es $r = \dfrac{3}{2}$, entonces los medios aritméticos serán

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r = 5 + \frac{3}{2} = 6\frac{1}{2} \\ a_3 &= a_2 + r = \frac{13}{2} + \frac{3}{2} = 8 \\ a_4 &= a_3 + r = 8 + \frac{3}{2} = 9\frac{1}{2} \end{aligned}$$

La progresión resulta

$$\boxed{5,\ 6\frac{1}{2},\ 8,\ 9\frac{1}{2},\ 11}$$

14. La cantidad de números naturales n que satisfacen la relación

$$2^9 \leq n \leq 2^{10}$$

es:

A) 256 B) 257 C) 512 D) 513 E) Ninguno.

Solución. Aplicando progresiones donde la razón $r = 1$, el primer término $a_1 = 2^9 = 512$ el último término $a_n = 2^{10} = 1024$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\,r \\ 1024 &= 512 + n - 1 \\ 512 + 1 &= n \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{n = 513}$$

15. En una progresión aritmética, se sabe que la suma de sus términos no varía al aumentar en 1 la razón y al mismo tiempo disminuir en 30 su primer término. El número de términos es:

A) 30 B) 61 C) 60 D) 62 E) Ninguno.

Solución. Primera progresión aritmética:

$$S_n = \frac{t + (t + (n-1)\,r)}{2} n$$

Segunda progresión aritmética:

$$S_n = \frac{(t-30) + (n-1)\,(r+1)}{2} n$$

igualando

$$\frac{t + (t + (n-1)\,r)}{2} n = \frac{(t-30) + (n-1)\,(r+1)}{2} n$$

resolviendo

$$\boxed{n = 61}$$

16. Para que las raíces de la ecuación $x^4 - (m+4)\,x^2 + 4m = 0$, estén en progresión aritmética, el valor de m será:

A) 6 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{4}{9}$ D) 9 E) Ninguna.

Solución. Resolviendo:

$$\begin{aligned} x^4 - (m+4)\,x^2 + 4m &= 0 \\ \left(x^2 - m\right)\left(x^2 - 4\right) &= 0 \\ \left(x - \sqrt{m}\right)\left(x + \sqrt{m}\right)(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces son: $x_1 = \sqrt{m}$; $x_2 = -\sqrt{m}$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$.

Primera solución, si $\sqrt{m} > 2$, ordenando la progresión: $-\sqrt{m}$, -2, 2, $\sqrt{m}$. La razón es:

$$\begin{aligned} \sqrt{m} - 2 &= 2 - (-2) \\ m &= 26 \end{aligned}$$

La progresión: -6, -2, 2, 6. La razón es $r = 4$.

Segunda solución, si $\sqrt{m} < 2$, ordenando la progresión: -2, $-\sqrt{m}$, $\sqrt{m}$, 2. La razón es:

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{m} &= \sqrt{m} - \left(-\sqrt{m}\right) \\ m &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

La progresión: -2, $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, 2. La razón es $\boxed{r = \frac{4}{3}}$.

17. La suma de los 8 primeros términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 136 y el producto de los extremos es 64, el lugar del término cuyo valor es igual a 15 veces la razón es:

A) 14 B) 13 C) 12 D) 15 E) Ninguno.

Solución. Sea la progresión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \underbrace{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}}_{\text{8 términos centrales}}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$$

$$\underbrace{a}_{1^o}, \underbrace{a+r}_{2^o}, \underbrace{a+2r}_{3^o}, \underbrace{a+3r}_{4^o}, \underbrace{a+4r}_{5^o}, \cdots \underbrace{a+11r}_{12^o}, \underbrace{a+12r}_{13^o}, \underbrace{a+13r}_{14^o}, \underbrace{a+14r}_{15^o}, \underbrace{a+15r}_{16^o}$$

Sumando estos 8 términos:

$$\begin{aligned} (a+4r) + (a+5r) + (a+6r) + ... + (a+10r) + (a+11r) &= 136 \\ 2a + 15r &= 34 \end{aligned}$$

El producto de sus extremos

$$a\,(a + 15r) = 64$$

Resolviendo ambos sistemas: $r_1 = 2$, $a_1 = 2$; $r_2 = -2$, $a_2 = 32$. La razón es 2 y el primer término es también 2. Para calcular la posición que ocupa el término que es 15 veces la razón será $t_n = 15r = 15\,(2) = 30$, entonces

$$30 = 2 + (n-1)\,(2)$$

de donde

$$\boxed{n = 15}$$

18. Sea a_n una progresión aritmética con diferencia común 3 y primer término $a_1 = 1$, pruebe:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{2006}}+\sqrt{a_{2007}}}=\frac{2006}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}}$$

Solución. El problema se encuentra en hallar la suma de todos los términos de esta serie, pero primero racionalicemos el primer término; esto es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} &= \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\times\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}\\ &= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}\end{aligned}$$

La diferencia entre $a_1 - a_2 = -3$, esto es:

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-3}$$

Ahora sumamos la serie:

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-3}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-3}+\cdots=\frac{\sqrt{a_1}}{-3}-\frac{\sqrt{a_2}}{-3}+\frac{\sqrt{a_2}}{-3}-\frac{\sqrt{a_3}}{-3}+\cdots$$

Como vemos los medios se anulan mútuamente, pero los extremos permanecen, entonces la suma total viene a ser:

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{2007}}}{-3}$$

ahora llevamos a la forma original, es decir:

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{2007}}}{-3}\times\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}}$$

operando:

$$\frac{a_1-a_{2007}}{(-3)\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}\right)}$$

el término $a_{2007} = a_1 + (2007-1)\,3$, reemplazando:

$$\frac{a_1-(a_1+(2007-1)\,3)}{(-3)\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}\right)}=\frac{2006\,(-3)}{(-3)\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}\right)}$$

simplificando:

$$\frac{2006}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}}$$

19. Hallemos un número de tres cifras, cuyas cifras forman una progresión aritmética y que se divide por 45.

    Solución. Sea x la cifra de las centenas, y, de las decenas y z de las unidades del número buscado. Como los números x, y y z forman una progresión aritmética, $y = \frac{x+z}{2}$. Según el planteamiento el número buscado se divide por 45, es decir, por 5 y por 9. O sea, el número acaba con la cifra 0 o la 5, mientras que la suma de las cifras del número buscado se divide por 9. Como resultado, llegamos al conjunto de dos sistemas

    $$\begin{cases} z = 0 \\ y = \dfrac{x+z}{2} \\ x + y + z = 9k \end{cases} ; \quad \begin{cases} z = 5 \\ y = \dfrac{x+z}{2} \\ x + y + z = 9k \end{cases}$$

    Del primer sistema hallamos:

    $$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 9k \end{cases}$$

    Tomando para y todos los valores posibles desde 1 hasta 9 , nos cercioramos que el último sistema sólo se satisface con el par $(6, 3)$.

    Del segundo sistema hallamos $\begin{cases} 2y = x + 5 \\ x + y + 5 = 9k \end{cases}$. De forma análoga, tomando para y todos los valores posibles desde 1 hasta 9, nos cercioramos que dicho sistema sólo se satisface con los pares $(1; 3)$ y $(7, 6)$. Así pues, las condiciones del problema se satisfacen con tres números: 630, 135 y 765.

20. Las pérdidas de MANACO en los últimos 20 años están en progresión aritmética. El último año perdió Bs. 3000 y cada año perdió Bs. 300 menos que el año anterior. ¿Cuánto perdió el primer año?

    A) 6800 B) 7800 C) 8700 D) 8600 E) Ninguno

21. Un trabajador debe llevar una carretilla de arena al pie de cada una de los 21 árboles que están al lado de una calzada, los árboles están a 4 metros de distancia y el monto de arena está 10 m antes del primer árbol. ¿Qué distancia (en metros) habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y regresar la carretilla al monton de arena?

    A) 2100 B) 2200 C) 1000 D) 500 E) Ninguno.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar la suma de los 20 primeros múltiplos de 7.

2. Hallar la suma de los 100 primeros números pares.

3. ¿Es $5, 15, 45, 135, 405...$ una progresión geométrica. Sol. $r = 3$.

4. ¿Es la sucesión $25, -5, 1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}$ una progresión geométrica. Sol. No.
5. ¿Es $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{9}{2}, ...$ una progresión aritmética? Sol. No.
6. Calcular el término general de la sucesión:

$$7, 4, 1, -2, -5, ...$$

Sol. $a_n = -3n + 10$.

7. Calcular el término general de la sucesión:

$$3, 6, 12, 24, 48, ...$$

Sol. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

8. Determinar el término general de la progresión aritmética

$$3, 6, 9, ...$$

Sol. $3n$.

9. Sea la sucesión $1, 3, 5, 7, 9, ...$ ¿Cuál es su término general? Sol. $a_n = 2n-1$.
10. ¿Cuál es el término 40 de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$? Sol. $\frac{40}{41}$.
11. Hallar el séptimo término de una progresión aritmética $4, 7, 10, 13, ...$ Sol. 22.
12. Encontrar el 6° término de la progresión geométrica $2, 8, ...$ Sol. 2048.
13. Calcular el octavo término de una progresión aritmética $\frac{3}{5}, \frac{14}{15}, ...$ Sol. $\frac{16}{15}$.
14. Hallar el duodécimo término de una la progresión aritmética: $-3, -\frac{7}{4}, ...$ Sol. $-\frac{47}{34}$.
15. Hallar el 14° término de una progresión aritmética: $\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, ...$ Sol. $-\frac{73}{33}$.
16. Hallar el décimo término de la progresión aritmética: $-4, 1, 6, 11, ...$ Sol. 36.
17. El tercer término de una progresión geométrica es 20 y la razón es 2. Hallar el primer término. Sol. 5.
18. Cuántos términos tiene la progresión aritmética: $4, 6, ..., 30$. Sol. $n = 14$.
19. Sumar los veinte primeros términos de la progresión: $-5, 4, 13, 22, 31, 40$. Sol. $S_{20} = 1610$.

20. La suma de los diez primeros términos de la progresión: $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Sol. $S_{10} = -5{,}33$

21. El cuarto término de una progresión aritmética es 7 y el sexto término es $\frac{14}{3}$. Hallar la diferencia. Sol. $-\frac{7}{6}$.

22. Una progresión aritmética comienza por 2, termina con 6 y su diferencia es $\frac{1}{2}$. ¿Cuántos términos hay en la progresión? Sol. $n = 9$.

23. Si el 27° término de una progresión aritmética es 94 y el primer término es 6; determínese la diferencia de la misma. Sol. $\frac{44}{13}$.

24. Hallar la suma de la progresión aritmética: $1, 3, 5, 7, ...$ siendo $n = 12$. Sol. 144.

25. Hallar 3 números en progresión aritmética cuya suma es 48 y cuyo producto es 3840. Sol. $12, 16, 20$.

26. La suma de 3 números que están en progresión aritmética es -15 y la suma de sus cuadrados es 83. Hallar los 3 números. Sol. $-7, -5, -3$.

27. Hallar la suma de los 26 primeros números terminados en 3. Sol. 3328.

28. La suma de los 30 primeros términos de la progresión

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$$

Sol. $S_{30} = \frac{305}{16}$.

29. Hallar la suma de los 12 primeros términos de una progresión geométrica

$$-\frac{10}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{45}, ...$$

Sol. $S_{12} = -0{,}79$

30. Cuántos medios aritméticos se deben interpolar entre 17 y 67 de tal manera que se forme una progresión aritmética cuya suma resultante (incluyendo medios y extremos) sea 462.

31. La suma de los números pares comprendidos entre 49 y 201 (puede considerarla como la suma de los términos de una progresión), vale:

A) 9652 B) 9500 C) 9348 D) 9196 E) Ninguno.

32. Un muchacho gana un boliviano el primer día, dos bolivianos el segundo, cuatro el tercer día, ocho el cuarto; y así sucesivamente. Determinar cuántos bolivianos ganará en total en 12 días.

A) $2^{12} - 1$ B) $2^{12} - 2$ C) $2^{12} - 3$ D) $2^{12} - 4$ E) Ninguno.

33. La suma de los 11 términos de una progresión aritmética creciente es 176. La diferencia de los extremos es 30. ¿Cuál es el último término?

    A) 20 B) 25 C) 31 D) 32 E) Ninguno.

34. ¿Cuántos números entre 20 y 400 son divisibles entre 7?

    A) 40 B) 75 C) 65 D) 55 E) Ninguno.

35. La suma de los 5 primeros términos de una progresión aritmética creciente es igual a -5 y la suma de los cuadrados de los cinco primero términos es igual a 45. Determinar el primer término.

    A) 1 B) -5 C) -2 D) -3 E) Ninguno.

36. Hallar la suma de los 40 primeros términos de la siguiente progresión aritmética

    $$P.A. : -3, 1, 5, ...$$

    A) 6900 B) 3000 C) 6000 D) 3900 E) Ninguno.

37. Calcular la suma de los números pares comprendidos entre 49 y 201 (puede considerarla como la suma de los términos de una progresión).

    A) 9652 B) 9500 C) 9348 D) 9196 E) Ninguno.

38. En una progresión aritmética la razón y el número de términos son iguales. La suma de los términos es igual a 156 y la diferencia de los extremos es igual a 30. Determinar el número de términos.

    A) 10 B) 4 C) 6 D) 8 E) Ninguno.

39. Calcular la suma de los números pares comprendidos entre los números 49 y 201.

    A) 9500 B) 9000 C) 10000 D) 10500 E) Ninguno.

40. Si el primer término de una progresión aritmética es igual a 8 y el décimo término es igual a -64. Hallar el quinto término.

    A) -37 B) -24 C) -40 D) -47 E) Ninguno.

41. El primer término de una progresión aritmética es 8 y el décimo término es -64. Hallar la razón.

    A) -8 B) 8 C) -6 D) 6 E) Ninguno.

42. El 15° término de una progresión aritmética es 20 y la razón $\frac{2}{7}$. Hallar el primer término.

    A) 12 B) 14 C) 16 D) 20 E) Ninguno.

43. En una progresión aritmética de 7 términos cuya razón es 4, sabiendo que el último término es 39. Hallar el primer término.

    A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) Ninguno.

44. Determinar el 42° término de la progresión aritmética de:

$$100,\ 97,\ 94,\ ...$$

A) -17 B) -21 C) -23 D) -25 E) Ninguno.

45. ¿Cuántos términos hay que tomar de la progresión aritmética

$$5,\ 9,\ 13,\ 17, ...$$

para que la suma valga 10877?

A) 73 B) 70 C) 74 D) 72 E) Ninguno.

46. Hallar una progresión aritmética sabiendo que la suma de sus cuatro términos es igual a 26 y el producto de sus mismos términos vale 880. Sol. El problema tiene 4 soluciones:

a) 2, 5, 8, 11.

b) 11, 8, 5, 2.

c) $\frac{13-\sqrt{1609}}{2}, \frac{39-\sqrt{1609}}{6}, \frac{39+\sqrt{1609}}{6}, \frac{13+\sqrt{1609}}{2}.$

d) $\frac{13+\sqrt{1609}}{2}, \frac{39+\sqrt{1609}}{6}, \frac{39-\sqrt{1609}}{6}, \frac{13-\sqrt{1609}}{2}.$

47. Hallar la suma de todos los números naturales de dos cifras. Sol. 3905.

48. Una progresión aritmética en la que la suma de un número cualquiera de términos sea siempre el triple del número de términos elevado al cuadrado. Sol. 3, 9, 15, 21.

49. Hallar la suma de todos los números de dos cifras que, al dividirlos por 4, den como resto la unidad. Sol. 1210.

50. En una progresión aritmética se sabe que la suma de los a primeros términos, es la suma de los b primeros como a es a b. Dar la razón de la progresión, sabiendo $a \neq b$.

A) a B) b C) $a+b$ D) $a-b$ E) 0.

51. La suma de los ocho términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 136 y el producto de los extremos es 64. El lugar del término cuyo valor es igual a 15 veces la razón es:

A) 14 B) 13 C) 12 D) 15 E) Ninguno.

52. Buscar 3 números positivos que estén en progresión aritmética de modo que su suma sea 21 y el mayor tenga 3 unidades más que la suma de los otros dos

A) 1; 6; 11 B) 2; 7; 12 C) 3; 7; 11 D) 1; 7; 12 E) Ninguno

53. La cantidad total de divisores (enteros positivos que lo dividen exactamente) del número 225 es:

    A) 8 B) 9 C) 12 D) 16 E) Ninguno.

54. Determinar la cantidad de divisores (cantidad de números naturales que lo dividen exactamente) del número 180.

    A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) Ninguno.

55. Para que las raíces de la ecuación $x^4 - (m+4)\,x^2 + 4m = 0$, estén en progresión aritmética el valor de m será:

    A) 6 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{4}{9}$ D) 9 E) Ninguno

56. La suma de los ocho términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 136 y el producto de los extremos es 64, el lugar del término cuyo valor es igual a 15 veces la razón es:

    A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) Ninguno

57. El cuarto término de una progresión aritmética es 9, el noveno término es -6, determine qué número de término vale -69.

    A) 15 B) 25 C) 30 D) 12 E) Ninguno

58. Si en una progresión aritmética limitada, el último término es 147 y los términos quinto y 20v0 son 27 y 117 respectivamente, hallar la suma del primer término y el número de términos.

    A) 28 B) 30 C) 15 D) 25 E) Ninguno

59. Se sabe que el 4to. y 8vo. término de una progresión aritmética suman 102, que el 10mo. y 17vo. suman 237, hallar el término del lugar 13.

    A) 110 B) 114 C) 124 D) 130 E) Ninguno

60. En una progresión aritmética de 40 términos se sabe que la suma de los extremos es 4; y el producto de los cuatro términos centrales es -15. Hallar el mayor de estos cuatro términos centrales.

    A) 7 B) 8 C) 5 D) 9 E) Ninguno

61. El producto del primer y quinto término de una progresión aritmética decreciente de 5 términos es igual al cuadrado del término central disminuido en 4. Hallar la razón.

    A) 2 B) -1 C) 1 D) -2 E) Ninguno

62. Hallar la suma de los números impares entre 0 y 200.

    A) 3000 B) 5000 C) 8000 D) 10000 E) Ninguno

63. Hallar cuantos números entre 20 y 200 son divisibles por 9.

    A) 20 B) 18 C) 25 D) 30 E) Ninguno

64. Tres números forman una progresión aritmética, su suma es 18 y su producto es 192. Calcular la diferencia del mayor menos el menor.

    A) 4 B) 3 C) 5 D) 8 E) Ninguno

17.2. PROGRESIONES GEOMETRICAS

Progresión geométrica, es toda serie en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante que es la razón.

17.2.1. TERMINO ENESIMO

Sea la progresión

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$$

en la que a_n es el último término y cuya razón es r.

En toda progresión geométrica, cada término es igual al término anterior multiplicado por la razón; luego:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = a_1 r^3 ... \end{aligned}$$

Aquí vemos que un término cualquiera es igual al primero a_1 multiplicado por la razón elevada a una potencia igual al número de términos que lo preceden.

Esta ley se cumple siempre; luego, *como a_n es el término n y le preceden $n-1$ términos, tendremos:*

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

17.2.2. SUMA DE LOS TERMINOS

La suma de los términos de una progresión geométrica está dado por:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

17.2.3. SUMA DE UNA PROGRESIÓN DECRECIENTE INFINITA

Esta dado por la fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el 7° términos de la progresión geométrica

$$3, 6, 12, ...$$

Solución. De la fórmula del términos enésimo

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde $a_1 = 3$, $r = 6 \div 3 = 2$, $n = 7$, reemplazando

$$a_7 = 3\,(2)^{7-1}$$

entonces

$$\boxed{a_7 = 192}$$

2. La razón de una progresión geométrica es $\dfrac{1}{2}$ y el 7° término $\dfrac{1}{64}$. Hallar el primer término.

Solución. De la fórmula del término enésimo despejamos el primer término, esto es

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

reemplazando los datos $a_7 = \dfrac{1}{64}$, $n = 7$, $r = \dfrac{1}{2}$

$$a_1 = \frac{\dfrac{1}{64}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-1}}$$

entonces

$$\boxed{a_1 = 1}$$

3. Hallar la razón de la progresión geométrica

$$2, ..., 64$$

de 6 términos.

Solución. De la fórmula del enésimo término, despejamos la razón

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

donde $a_1 = 2$, $a_6 = 64$, $n = 6$, reemplazando

$$r = \sqrt[6-1]{\frac{64}{2}}$$

entonces

$$\boxed{r = 2}$$

4. En una progresión geométrica el primer término es 7 y el último es 5103, si la razón es 3. ¿De cuántos términos se compone la progresión?

   A) 7   B) 6   C) 5   D) 8   E) Ninguno

5. Hallar la suma de los 7 primeros términos de

$$12,\ 4,\ 1\tfrac{1}{3},\ ...$$

Solución. La fórmula de la suma de los terminos de una progresión geométrica es

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

donde $a_1 = 12$, $r = 4 \div 12 = \frac{1}{3}$, $n = 7$, $a_7 = 12\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} =$, reemplazando

$$S = \frac{\left(\frac{4}{243}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - 12}{\frac{1}{3} - 1}$$

entonces

$$\boxed{S = 17\frac{241}{243}}$$

6. Interpolar 5 medios geométricos entre 128 y 2.

Solución. La progresión geométrica esta conformada por 7 términos, esto es

$$128,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2$$

de lo que se trata es hallar estos cinco medios geométricos, para ello hallamos la razón

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

donde $n = 7$, $a_1 = 128$, $a_7 = 2$, reemplazando

$$r = \sqrt[7-1]{\frac{2}{128}}$$

entonces

$$\boxed{r = \frac{1}{2}}$$

ahora hallamos

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1r = 128\left(\frac{1}{2}\right) = 64\\
a_3 &= a_2r = 64\left(\frac{1}{2}\right) = 32\\
a_4 &= a_3r = 32\frac{1}{2} = 16\\
a_5 &= a_4r = 16\left(\frac{1}{2}\right) = 8\\
a_6 &= a_5r = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4
\end{aligned}$$

la progresión geométrica es

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2$$

7. Hallar la suma de la progresión infinita

$$-5, -2, -\frac{4}{5}, ...$$

Solución. La fórmula de la suma, está dado por

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

donde $a_1 = -5$, $r = (-2) \div (-5) = \frac{2}{5}$, reemplazando

$$S = \frac{-5}{1-\dfrac{2}{5}}$$

entonces

$$\boxed{S = -8\frac{1}{3}}$$

8. La suma de los tres primero términos de una progresión geométrica creciente es $\dfrac{21}{2}$, si el segundo término es igual a tres. Determinar la razón de la progresión geométrica.

   A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) Ninguno

9. Tres números forman una progresión geométrica decreciente, la suma de los tres números es igual a 39 y el producto de dichos números es igual a 1000. Hallar la suma de los tres números.

   A) 19 B) 93 C) 63 D) 73 E) Ninguno

10. Se sabe que las siguientes cantidades

$$2^{\sqrt{x-1}},\ 2^{\sqrt{2x-1}},\ 2^{\sqrt{3x+1}}$$

forman una progresión geométrica, la razón de esta progresión es:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) Ninguno.

Solución. La razón de esta progresión está dado por:

$$r = \frac{2^{\sqrt{3x+1}}}{2^{\sqrt{2x-1}}} = \frac{2^{\sqrt{2x-1}}}{2^{\sqrt{x-1}}}$$

resolviendo esta ecuación:

$$2^{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}} = 2^{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1}}$$

igualando exponentes

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-1}$$

resolviendo

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \text{ la solución es : } 1, 5$$

reemplazando en la razón, para $x_1 = 1 \Rightarrow r = \dfrac{2^{\sqrt{2(1)-1}}}{2^{\sqrt{1-1}}} = 2$ y para $x_2 = 5 \Rightarrow r = \dfrac{2^{\sqrt{2(5)-1}}}{2^{\sqrt{5-1}}} = \dfrac{2^3}{2^2} = 2$. Entonces la solución es

$$\boxed{r = 2}$$

11. Hallar la razón de una progresión geométrica decreciente sabiendo que los inversos de sus términos segundo, cuarto y quinto forman una progresión aritmética.

A) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ B) $\frac{1}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}$ C) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ D) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$

E) Ninguno.

Solución. Progresión geométrica: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$. La progresión está dada en función del primer término, si la razón es r.

$$\underbrace{a_1}_{1^o},\ \underbrace{a_1 r}_{2^o},\ \underbrace{a_1 r^2}_{3^o},\ \underbrace{a_1 r^3}_{4^o},\ \underbrace{a_1 r^4}_{5^o}$$

La progresión aritmética con los términos 2°, 4° y 5°, es

$$\frac{1}{a_1 r},\ \frac{1}{a_1 r^3},\ \frac{1}{a_1 r^4}$$

de esta progresión, la razón es

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 r^3} - \frac{1}{a_1 r} &= \frac{1}{a_1 r^4} - \frac{1}{a_1 r^3} \qquad \left(*a_1 r^4\right) \\ r - r^3 &= 1 - r \\ r^3 - 2r + 1 &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo

$$\boxed{r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}$$

12. Hallar el tercer término de una progresión geométrica infinitamente decreciente si sabemos que su suma es igual a 9, y la suma de los cuadrados de todos sus términos es igual a 40.5.

    Solución. Según el planteamiento $S = 9$, es decir, $\frac{a_1}{1-r} = 9$. Analicemos la serie a_1^2, a_2^2, a_3^3, ..., a_n^2. De acuerdo con el planteamiento su suma es igual a 40.5. Señalemos que los términos de la serie forman una progresión geométrica con el primer término a_1^2 y la razón r^2, lo que significa que la suma de dicha progresión es igual a $\frac{a_1^2}{1-r^2}$. Como resultado, es posible escribir el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r} = 9 \\ \dfrac{a_1^2}{1-r^2} = 40{,}5 \end{cases}$$

    que al resolverlo nos proporciona: $a_1 = 6$, $r = \frac{1}{3}$. Así, pues, $a_5 = a_1 r^4 = 6\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}$.

13. Tres números forman una progresión geométrica. Si del tercer número restamos 4, los números forman una progresión aritmética. Si de los términos segundo y tercero de la progresión aritmética obtenida restamos de cada uno de ellos la unidad, de nuevo obtenemos una progresión geométrica. Hallemos esos números.

    Solución. Sean x, y y z los números buscados. Como ellos forman una progresión geométrica (con mayor precisión, son términos sucesivos de una progresión geométrica), haciendo uso de su propiedad característica, obtenemos $y^2 = xz$. Seguidamente, como los números x, y, $(z-4)$ forman una progresión aritmética, aplicando su propiedad característica, hallamos $y = \frac{x + (z-4)}{2}$. Por fin, ya que los números x, $(y-1)$, $(z-5)$ forman una progresión geométrica, entonces $(y-1)^2 = x(z-5)$. Como resultado, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ x + z - 4 = 2y \\ (y-z)^2 = x(z-5) \end{cases}$$

que al ser resuelto nos proporciona (1; 3; 9) y $\left(\frac{1}{9};\ \frac{7}{9};\ \frac{49}{9}\right)$. Estos valores de x, y y z satisfacen las condiciones del problema. Así, pues, los números buscados son: 1, 3 y 9 o bien $\frac{1}{9}$, $\frac{7}{9}$ y $\frac{49}{9}$.

14. Calcular el valor de cuatro términos a, b, c y d, sabiendo que los tres primeros términos están en progresión aritmética y los tres últimos están en progresión geométrica, siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios igual a 12, ¿cuál será l suma de sus términos?

    A) 24 B) 16 C) 26 D) 18 E) Ninguno

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se sabe que las siguientes cantidades

$$2^{\sqrt{x-1}},\ 2^{\sqrt{2x-1}},\ 2^{\sqrt{3x+1}}$$

   forman una progresión geométrica, la razón de esta progresión es:

   A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) Ninguno

2. En el mes de marzo del 2008 se ha detectado 15 casos de SIDA en Cocabamba. El informe de un equipo médico para el año anterior afirmaba que los nuevos casos mensuales aumentan a razón de un 20 % con respecto al mes anterior. De acuerdo con esto, ¿cuántos casos se esperarán encontrar en el mes de diciembre 2008?

   A) 67 B) 77 C) 87 D) 97 E) Ninguno

3. Una persona ha ganado en cada año $\frac{1}{3}$ de lo que ganó anteriormente. Si el primer año ganó 24300 bolivianos, ¿cuánto ha ganado en 6 años?

   A) Bs. 36300 B) Bs. 36500 C) Bs. 36200 D) Bs. 36400 E) Ninguno

4. En una progresión geométrica se conoce que: $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_3 = 1$ y $t_n = 256$. Encontrar el número de términos.

   A) 19 B) 21 C) 23 D) 25 E) Ninguno

5. La suma de 3 números en progresión geométrica es 70; si se multiplican los dos extremos por 4 y el intermedio por 5, los productos están en progresión aritmética. Hallar los números.

   A) 5, 15, 50 B) 10, 20, 40 C) 6, 18, 54 D) 3, 12, 48 E) Ninguo

6. Una persona ahorró Bs. 128 en Enero, y de ahí en adelante cada mes solo ha podido ahorrar la mitad de lo que ahorró el mes anterior. ¿Cuánto ha ahorrado en el décimo més y cuánto es su ahorro total?

A) 0.5; 250.75 B) 0.25; 255.75 C) 0.25; 225.75 D) 0.50; 225.75
E) Ninguno

7. ¿Cuáles serán los valores de x para que los números x, $2x+7$, $10x-7$ formen una progresión geométrica?

   A) $7, \frac{7}{6}$ B) $7, -\frac{7}{6}$ C) $-7, \frac{7}{6}$ D) $-7, -\frac{7}{6}$ E) Ninguno

8. En una progresión geométrica el primer término es 7 y el último es 5103, si la razón es 3. ¿De cuántos términos se compone la progresión?

   A) 7 B) 6 C) 5 D) 8 E) Ninguno.

9. Tres números forman una progresión geométrica decreciente, la suma de los tres números es igual a 39 y el producto de dichos números es igual a 1000. Hallar la suma de los tres números.

   A) 39 B) 93 C) 63 D) 73 E) Ninguno.

10. El sexto término de una progresión geométrica es 4 y el décimo término es igual a $\frac{1}{4}$. Calcular el primer término de la progresión geométrica.

    A) 128 B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{8}{3}$ D) 138 E) Ninguno.

11. En una progresión geométrica el cuarto término es igual a 2 y el octágono término es igual a 32. Determinar el primer término.

    A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) Ninguno.

12. En una progresión geométrica el cuarto término es igual a 2 y el octavo término es igual a 32. Determinar el primer término.

    A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) 2 D) 5 E) Ninguno.

13. El primer término de una progresión geométrica es $-\frac{2}{81}$ y el octavo término es 54. Hallar el valor de la razón.

    A) 2 B) -2 C) 3 D) -3 E) Ninguno.

14. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que la suma del primero y el tercero es igual a 52 y que el cuadrado del segundo es 100. Sol. (1) 50, 10, 2 o (2) 50, -10, 2 o los mismos números en orden inverso.

15. Hallar cuatro números en progresión geométrica tales que la suma de los extremos valga 27 y el producto de los medios sea igual a 72. Sol. 3, 6, 12, 24 o en orden inverso 24, 12, 6, 3.

16. Hallar cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los extremos es igual a 35 y la suma de los medios es igual a 30. Sol. 8, 12, 18, 27.

17. Hallar el primer término y la razón de una progresión geométrica que consta de nueve términos, tales que el producto de sus extremos sea igual a 2304 y la suma de los términos cuarto y sexto sea igual a 120. Sol. (1) $u_1 = 3$, $q = 2$. (2) $u_1 = -3$, $q = -2$. (3) $u_3 = 768$, $q = \frac{1}{2}$ y (4) $u_4 = -768$, $q = -\frac{1}{2}$.

18. Hallar a_n y s_n en la progresión geométrica 2, 4, 8, ... hasta 10 términos. Sol. 1024, 2046.

19. Hallar a_n y s_n en la progresión geométrica 1, 4, 16, ... hasta 7 términos. Sol. 4096, 5461.

20. En cada uno de los ejercicios a, b y c, se dan 3 de los 5 elementos de una progresión geométrica. Calcular los otros dos términos

    a) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{-32}{243}$, $r = -\frac{2}{3}$. Sol. $s_6 = \frac{135}{243}$, $n = 6$.

    b) $a_1 = 2$, $a_6 = 64$, $n = 6$. Sol. $r = 2$, $s_6 = 126$.

    c) $r = 2$, $s_7 = 635$, $n = 7$. Sol. $a_1 = 5$, $a_7 = 230$.

21. Interpolar 5 medios geométricos entre $\frac{1}{8}$ y 8. Sol. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4.

22. Hallar la media geométrica entre x^2 y y^2. Sol. xy.

23. El tercer término de una progresión geométrica es 3 y el séptimo término es $\frac{3}{16}$. Calcular la razón y el primer término. Sol. $r = \frac{1}{2}$, $a_1 = 12$.

24. El tercer término de una progresión geométrica es 9 y el sexto término es 243. Hallar el séptimo término y la suma de los primeros seis términos. Sol. $a_7 = 729$, $s_6 = 364$.

25. La media aritmética de dos números positivos diferentes es 5 y su media geométrica es 4. Calcular los números. Sol. 2 y 8.

26. Calcular el valor de cuatro números: a, b, c y d, sabiendo que los tres primeros términos están en progresión aritmética y los tres últimos en progresión geométrica, sabiendo que la suma de los extremos es 14 y la suma de los medios igual a 12. La suma de estos números es:

    A) 24 B) 16 C) 26 D) 28 E) Ninguno.

27. El lunes gané 2 Bs. y cada día después gané el doble de lo que gané el anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?

28. Un dentista arregla 20 piezas a una persona cobrándole un centavo por la primera, 2 cts. por la segunda, 4 cts. por la tercera, 8 cts. por la cuarta, y así sucesivamente. ¿Cuáles serán los honorarios del dentista?

29. Un hombre jugó durante 8 días y cada día ganó $\dfrac{1}{3}$ de lo que ganó el día anterior. Si el 8° día ganó 1 Bs. ¿Cuánto ganó el primer día?

30. El producto del 3° y el 7° término de una progresion geométrica de 9 términos es $\dfrac{1}{210}$. ¿Cuál es el producto del primer término por el último?

31. En una progresión geométrica de 5 términos el cuadrado del 3° término es $\dfrac{4}{81}$. Si el último término es $\dfrac{5}{81}$. ¿Cuál es el primero?.

32. El 4° término de una progresión geométrica es $\dfrac{1}{4}$ y el 7° término $\dfrac{1}{32}$. Hallar el 6° término.

33. Un hombre que ahorra cada año los $\dfrac{2}{3}$ de lo que ahorró el año anterior, ahorró el 5° año \$160. ¿Cuánto ha ahorrado en los 5 años?.

34. La población de una ciudad ha aumentado en progresión geométrica de 59049 almas que era en 1953 a 100000 almas en 1958. ¿Cuál es la razón de crecimiento por año?

35. Una persona ha ganado en cada año $\dfrac{1}{8}$ de lo que ganó el año anterior. Si el primer año ganó 24300 Bs. ¿cuánto ha ganado en 6 años?

36. Se compra una finca de 2000 hectáreas a pagar en 15 años de este modo: \$1 el primer año, \$3 el segundo año, \$9 el tercer año y así sucesivamente. ¿Cuál es el importe de la finca?.

37. Si 1 y 2 son los términos extremos de una progresión geométrica, de 24 términos. Calcular el producto de todos los términos de la progresión geométrica.

    A) 1024 B) 4096 C) 3600 D) 1340 E) Ninguno

38. Si el cuarto término de una progresión geométrica es 4 y el octavo es 8 ¿Cuánto vale el sexto términos?

    A) $4\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) Ninguno

39. La suma de una progresión geométrica de tres términos es de 248 y su producto es 64000. Determine el término mayor.

    A) 500 B) 300 C) 400 D) 200 E) Ninguno

40. Las edades de tres personas están en progresión geométrica siendo el producto de sus edades 27000. ¿Cuál es la edad de la persona del medio?

    A) 40 B) 25 C) 30 D) 60 E) Ninguno

41. Un muchacho gana 1 Bs el primer día, 2 Bs el segundo, 4 Bs el tercer día, 8 Bs el cuarto y así sucesivamente. Determinar cuántos bolivianos ganará en un total de 12 días.

    A) $2^{12}-1$ B) $2^{12}-2$ C) $2^{12}-3$ D) $2^{12}-4$ E) Ninguno

42. Un guardia de un pozo de una hacienda ha plantado a partir del pozo, cada 5 metros, y en la dirección Norte un total de 27 árboles y puede sacar agua del pozo cada vez para el riego de un solo árbol. ¿Cuánto tiene que andar diariamente para regar los 27 árboles?

    A) 3780 m B) 4000 m C) 3600 m D) 3700 m E) Ninguno

43. Una familia esta constituida por 4 miembros, el padre y sus tres hijos; si el menor de estos tiene 32 años, calcular la edad del padre, sabiendo que dichas edades están en progresión geométrica y que la suma de las edades de los otros dos hijos es 90.

    A) 64 años B) 62 años C) 56 años D) 58 años E) 62.5 años

44. Tres números forman una progresión geométrica, si se resta 3 al tercer término entonces genera una progresión aritmética, pero si al primer término de la progresión aritmética generada le sumamos 1, se obtiene otra progresión geométrica. Hallar el término mayor de la progresión original.

    A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) Ninguno.

Capítulo 18

EXPONENCIALES - LOGARITMOS

18.1. ECUACIONES EXPONENCIALES

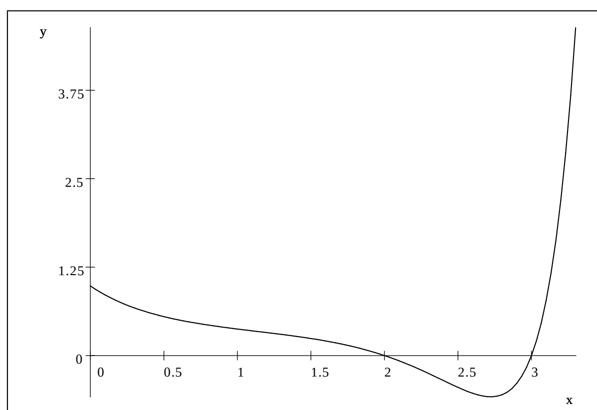
Al resolver ecuaciones exponenciales se emplean dos métodos fundamentales: 1) Paso de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ a la ecuación $f(x) = g(x)$; 2) introducción de nuevas variables. En ocasiones, es preciso aplicar procedimientos artificiales.

Ecuaciones exponenciales. Examinemos las ecuaciones del tipo $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$ y aquellas que se reducen a ellas. La resolución de semejantes ecuaciones se basa en el siguiente teorema.

Teorema 1. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ es equivalente a la ecuación $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 1. Resolvamos la ecuación $2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$.

Solución. La ecuación dada es equivalente a $x^2 - 2x = 3x - 6$ y, por lo tanto, las raíces de la última ecuación $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ son también las raíces de la ecuación inicial. Gráfica de la función:



Ejercicio 2. Resolvamos la ecuación $\dfrac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1}$.

Solución. Reduzcamos todos los exponentes a una misma base, p. ej., a la base 5:

$$5^{0,5-x} \cdot 5^{-0,5} = 5 \cdot \left(5^{-2}\right)^{x-1}$$

A continuación, tenemos: $5 - x = 5^{3-2x}$. La última ecuación es equivalente a $x = 2x - 3$, de la que hallamos $x = 3$. Así pues, $x = 3$ es la raíz de la ecuación dada.

Ejercicio 3. Resolvamos la ecuación

$$3^{x^2-4} = 5^{2x} \tag{18.1}$$

Solución. Como $5 = 3^{\log_3 5}$, la ecuación (18.1) se puede transformar a la forma $3^{x^2-4} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{2x}$.

Esta ecuación es equivalente a la siguiente:

$$x^2 - 4 = 2x \log_3 5 \tag{18.2}$$

Las raíces de la ecuación cuadrática (18.2) y, junto con ella de la ecuación exponencial dada (18.1), son las siguientes: $x_{1,2} = \log_3 5 \pm \sqrt{\log_3^2 5 + 4}$.

Ejercicio 4. Resolvamos la ecuación

$$5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x \tag{18.3}$$

Solución. Como $5^{1+2x} = 5 \cdot 25^x$, $6^{1+x} = 6 \cdot 6^x$ y $150^x = 6^x \cdot 25^x$, la ecuación (18.3) se puede transformar a la forma:

$$5 \cdot 25^x + 6 \cdot 6^x - 6^x \cdot 25^x - 30 = 0,$$

y, a continuación, $5\left(25^x - 6\right) - 6^x\left(25^x - 6\right) = 0$, $\left(25^x - 6\right) \times \left(5 - 6^x\right) = 0$.

La última ecuación se reduce al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 25^x - 6 &= 0 \\ 5 - 6^x &= 0, \end{aligned}$$

que tiene las raíces: $x_1 = \log_{25} 6$, $x_2 = \log_6 5$.

Ejercicio 5. Resolvamos la ecuación

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0 \tag{18.4}$$

Solución. Apliquemos el método de introducción de nuevas variables.

Como $4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2$ y $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, la ecuación (18.4) puede ser reescrita del modo siguiente:

$$\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Haciendo $u = 2^x$, obtenemos la ecuación cuadrática $u^2 + 2u - 24 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = 4$, $u_2 = -6$. Por esta razón, el problema se reduce a la resolución del conjunto de ecuaciones: $2^x = 4$; $2^x = -6$.

De la primera ecuación de este conjunto, obtenemos: $x = 2$. La segunda ecuación no tiene raíces, ya que $2^x > 0$ con cualquier valor de x. Así, pues, $x = 2$ es la raíz de la ecuación (18.4).

Ejercicio 6. Resolvamos la ecuación

$$2^x + (0,5)^{2x-3} - 6\,(0,5)^x = 1$$

Solución. Como $(0,5)^{2x-3} = 2^{3-2x} = \dfrac{8}{2^{2x}}$ y $6\,(0,5)^x = \dfrac{6}{2^x}$, entonces

$$2^x + \frac{8}{2^{2x}} - \frac{6}{2^x} - 1 = 0.$$

Haciendo $u = 2^x$, obtenemos: $u + \dfrac{8}{u^2} - \dfrac{6}{u} - 1 = 0$ y, seguidamente, $u^3 - u^2 - 6u + 8 = 0$, es decir $(u-2)\left(u^2 + u - 4\right) = 0$.

Esta última ecuación tiene tres raíces: $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $u_3 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Ahora, el problema se reduce a la solución del conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \\ 2^x &= \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ 2^x &= \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

De la primera ecuación hallamos $x_1 = 1$, de la segunda, $-x_2 = \log_2 \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$, la tercera ecuación no tiene raíces, ya que $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$ y $2^x > 0$ con $x \in \mathbb{R}$.

Es decir, la ecuación inicial tiene las siguientes raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = \log_2 \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Ejercicio 7. Resolvamos la ecuación

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0 \tag{18.5}$$

Solución. Como $6^x = 3^x \cdot 2^x$, tendremos

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x \cdot 2^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$$

Haciendo $u = 3^x$, $v = 2^x$, obtenemos la ecuación:

$$6u^2 - 13uv + 6v^2 = 0 \tag{18.6}$$

que es una ecuación homogénea de segundo grado con relación a las variables u y v. Como $v = 2^x$ no se reduce a cero con ninguno de los valores de x, al

dividir ambos miembros de la ecuación (18.6) por v^2, obtenemos una ecuación equivalente a (18.6):

$$6\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 13\left(\frac{u}{v}\right) + 6 = 0.$$

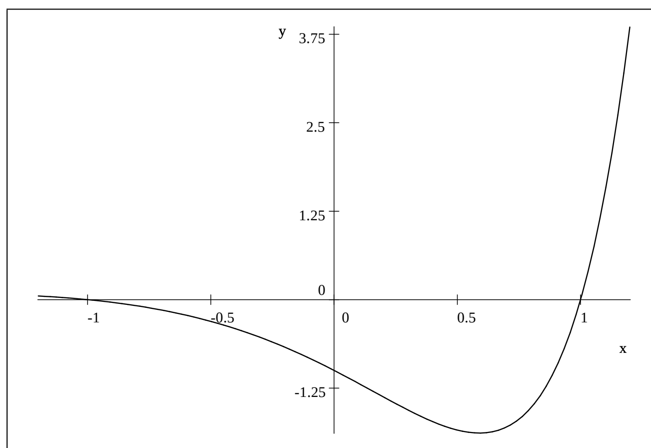
Haciendo $z = \frac{u}{v}$, obtenemos: $6z^2 - 13z + 6 = 0$, de donde $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = \frac{2}{3}$.

Tomando en consideración que $z = \frac{u}{v} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, podemos escribir el conjunto de ecuaciones:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$$

del cual, hallamos: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Esto significa, que la ecuación (18.5) tiene dos raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

La gráfica de la función (18.5), es:

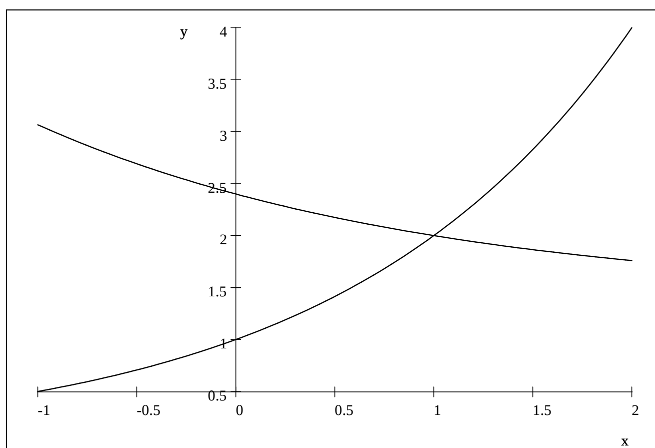


Ejercicio 8. Resolvamos la ecuación

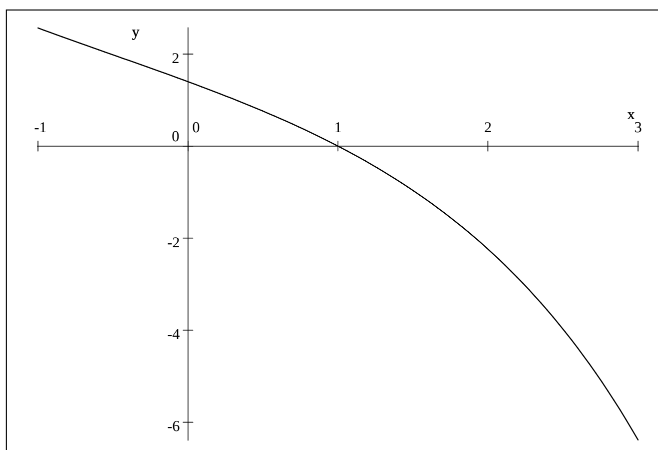
$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x \tag{18.7}$$

Solución. Ninguno de los procedimientos analizados en los anteriores ejemplos nos sirve para resolver (18.7). Intentemos hallar alguna solución de esa ecuación según el método de selección. En el caso dado, esto es fácil: $x_1 = 1$. Claro está, que, por ahora, no podemos considerar que la ecuación está resuelta: ella puede asimismo tener otras raíces. Demostremos que no hay otras raíces.

La función $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ decrece, mientras que la función 2^x crece por toda la recta numérica. O sea, la ecuación (18.7) no puede tener más de una raíz (ver figura). Así, pues, $x = 1$ es la única raíz de la ecuación (18.7)



La gráfica de la función es:



2. Las ecuaciones exponenciales potenciales son aquellas que tienen la forma $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$. si es conocido que $f(x) > 0$ y $f(x) \neq 1$, tal ecuación, como la exponencial, se resuelve mediante la igualación de los exponentes: $g(x) = h(x)$. Si no se estipula la posibilidad de que $f(x) \leq 0$ ó bien $f(x) = 1$, será preciso analizar varios casos, como se hace en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 9. Resolvamos la ecuación

$$\left(x^2 + x - 57\right)^{3x^2+3} = \left(x^2 + x - 57\right)^{10x} \tag{18.8}$$

Solución. Durante la resolución de la ecuación exponencial potencial dada hay que analizar cuatro casos:

1) $x^2 + x - 57 = 1$, es decir, $x^2 + x - 58 = 0$.

En este caso, la ecuación (18.8) toma la forma $1^{3x^2+3} = 1^{10x}$, es decir, son también las raíces de la ecuación (18.8). De la ecuación $x^2+x-58 = 0$, hallamos $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$.

2) $x^2 + x - 57 = -1$, o sea, $x^2 + x - 56 = 0$. En este caso, la ecuación (18.8) toma la forma

$$(-1)^{3x^2+3} = (-1)^{10x} \tag{18.9}$$

La ecuación (18.9) sólo puede ser satisfecha con tales valores de x con los que $3x^2 + 3$ y $10x$ son números enteros (ya que el número negativo (-1) sólo puede elevarse a un exponente entero) de igual paridad (o sea, los dos son pares o bien los dos, impares).

De la ecuación $x^2 + x - 56 = 0$, hallamos: $x_1 = -8$, $x_2 = 7$. El valor $x_1 = -8$ no satisface la ecuación (18.9), en tanto que el valor $x_2 = 7$, la satisface. Así, pues, $x = 7$ es la raíz de la ecuación (18.8).

3) $x^2 + x - 57 = 0$. En este caso, la ecuación (18.8) toma la forma

$$0^{3x^2+3} = 0^{10x} \tag{18.10}$$

La ecuación (18.10) sólo puede ser satisfecha con tales valores de x, con los que $3x^2 + 3 > 0$ (esto es cierto para todo x) y $10x > 0$, en este caso la ecuación (18.10) toma la forma $0 = 0$ (recordemos que la expresión 0^r sólo tiene sentido con $r > 0$).

De la ecuación $x^2 + x - 57 = 0$ hallamos $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{229}}{2}$.

El valor de $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{229}}{2}$ no satisface la condición $10x > 0$, en tanto que $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ satisface dicha codición. Así, pues, $x = \dfrac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ es la raíz de la ecuación (18.8).

4) Si $x^2 + x - 57 > 0$ y $x^2 + x - 57 \neq 1$, de la ecuación (18.8) llegamos a la conclusión de que $3x^2 + 3 = 10x$, de donde obtenemos: $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$. Estos dos valores han de ser comprobados poniéndolos en la ecuación (18.8). Con $x = 3$ obtenemos $(-45)^{30} = (-45)^{30}$, es decir, una igualdad cierta.

Con $x = \dfrac{1}{3}$ la ecuación (18.8) toma la forma:

$$\left(\frac{4}{9} - 57\right)^{\frac{10}{3}} = \left(\frac{4}{9} - 57\right)^{\frac{10}{3}}.$$

Esta anotación no tiene sentido (un número negativo se eleva a una potencia fraccionaria). Esto significa que sólo $x = 3$ es la raíz de la ecuación (18.8).

Resumiendo, llegamos a la conclusión de que la ecuación (18.8) tiene cinco raíces: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$; $x_3 = 7$, $x_4 = \dfrac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ y $x_5 = 3$.

1. Resolver la siguiente ecuación exponencial:

$$7\left(3^{x+1}\right) - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$$

A) 2 B) -1 C) 1 D) -2 E) Ninguno

2. $9^{x+2} = 9^x + 240$. Sol. $\dfrac{1}{2}$

3. $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$. Sol. 5

4. $4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$. Sol. $\dfrac{3}{2}$

5. $\sqrt[x]{x^{x-1}} = 9$. Sol. $\dfrac{1}{3}$

6. Resolver la ecuación exponencial:

$$2^{3^{x-5}} = 8^{9^{x+4}}$$

A) -8 B) 8 C) -14 D) 14 E) Ninguno

7. Resolver la ecuación exponencial:

$$16^{32^{x-2}} = 2^{2^{x+2}}$$

A) 5 B) 2 C) $\dfrac{2}{5}$ D) $\dfrac{5}{2}$ E) Ninguno

8. Resolver la ecuación exponencial:

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}}$$

A) 1 B) -1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 2 E) Ninguno

9. Resolver la ecuación exponencial:

$$\left(x^{x^5}\right)^5 = \left(7^{\frac{7}{5}}\right)^5$$

A) 7 B) 5 C) $\sqrt[7]{5}$ D) $\sqrt[5]{7}$ E) Ninguno

10. Si $\log_{a+1}(x+1) = 2$ y $\log_{a+2}(x+8) = 2$; entonces $a + x$ vale:
A) 3 B) 9 C) 10 D) 18 E) Ninguno.

11. El valor de la siguiente expresión es igual a:

$$3\log_{27}(3) \times \log_{27}(81) - \log_{\left(\frac{1}{27}\right)}(9)$$

A) -1 B) 3 C) 2 D) -3 E) Ninguno.

12. Resolver la ecuación exponencial:

$$2^{3^{x-5}} = 8^{9^{x+4}}$$

A) -8 B) 8 C) -14 D) 14 E) Ninguno.

Solución.

$$\begin{aligned} 2^{3^{x-5}} &= 8^{9^{x+4}} \\ 2^{3^{x-5}} &= \left(2^3\right)^{9^{x+4}} \\ 2^{3^{x-5}} &= 2^{3\left(3^2\right)^{x+4}} \end{aligned}$$

Igualando exponentes

$$\begin{aligned} 3^{x-5} &= 3\cdot\left(3^2\right)^{x+4} \\ 3^{x-5} &= 3^{2x+9} \end{aligned}$$

Nuevamente igulando exponentes

$$x-5 = 2x+9$$

de donde

$$\boxed{x=-14}$$

13. Resolver la ecuación exponencial

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}}$$

A) 1 B) -1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 2 E) Ninguno.

Solución.

$$\begin{aligned} 4^{x+\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ 4^{x+\frac{1}{2}} &= 3^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ 4^{x+\frac{1}{2}} &= 3^{x-\frac{1}{2}}\cdot 3 + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ 4^{x+\frac{1}{2}} &= 3^{x-\frac{1}{2}}\left(3+1\right) \\ \frac{4^{x+\frac{1}{2}}}{4} &= 3^{x-\dfrac{1}{2}} \\ 4^{x-\frac{1}{2}} &= 3^{x-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ahora bien para que esta igualdad se cumpla los exponentes deben ser igual a cero, $x-\frac{1}{2}=0$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

14. Resolver la ecuación exponencial

$$\left(x^{x^5}\right)^5 = \left(7^{\frac{7}{5}}\right)^5$$

A) 7 B) 5 C) $\sqrt[7]{5}$ D) $\sqrt[5]{7}$ E) Ninguno.

Solución.

$$\begin{aligned} \left(x^{x^5}\right)^5 &= 7^7 \\ \left(x^5\right)^{x^5} &= 7^7 \end{aligned}$$

igualando bases

$$x^5 = 7$$

de donde

$$\boxed{x = \sqrt[5]{7}}$$

15. Calcular el valor de $(x+y)$, del sistema de ecuaciones exponenciales.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^{2y-1} = x\sqrt{2} & (1) \\ 2y + y^{y^x} = 1 & (2) \end{cases}$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{10}$ E) Ninguno.

Solución. Trabajando en (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{2y-1}} &= x\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= x\left(x^{2y-1}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} &= x^{2y} \end{aligned}$$

Suponiendo que las bases son iguales y que también los exponentes son iguales, esto es: $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{4}$. Reemplazando estos valores en (2)

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Como estos valores cumple con la ecuación (2) entonces $x = \frac{1}{2}$e $y = \frac{1}{4}$, son soluciones del sistema, ahora

$$x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

esto es

$$\boxed{x + y = \frac{3}{4}}$$

701. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$
702. $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0,001\left(10^{3-x}\right)^2$
703. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$
704. $(0,6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$
705. $\sqrt{2x\sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$
706. $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$
707. $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288.$
708. $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0.$
709. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2.$
710. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0.$
711. $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$
712. $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1,5-1} - 80 = 0.$
713. $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0.$
714. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$
715. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} - 35 \cdot 7^x = 0.$
716. $4^x - 3^{x-0,6} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}.$
717. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4.$
718. $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$
719. $2 \cdot 4^x + 25^{x+1} = 15 \cdot 10^x.$
720. $16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x.$
721. $56 \cdot 4^{x-1} - 53 \cdot 14^x + 2 \cdot 49^{x+0,5} = 0.$
722. $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0.$
723. $2^x - 2\,(0,5)^{2^x} - (0,5)^x + 1 = 0.$
724. $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8.$
725. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}.$
726. $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$
727. $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 4.$
728. $\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = 1.$

729. $|x|^{x^2-2x} = 1.$
730. $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$
731. $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$
732. $3^x + 4^x = 5^x.$
733. $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0.$
734. $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18.$
735. $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4.$

18.2. LOGARITMOS

1. Escriba los siguientes ejercicios como suma y diferencia de logaritmos. Desarrolle al máximo.

   a) $\log_3 \left(x^3y^3\right)^{\frac{1}{2}}$

   b) $\log_b \left(\dfrac{xy^3z}{b^6}\right)^3$

   c) $\log_b \left(\dfrac{x^2y}{5x^3}\right)$

   d) $\log_2 \left(\dfrac{x\left(x^2-y\right)}{\sqrt{y}}\right)$

   e) $\log_c \left(\dfrac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{c^2}}\right)$

   f) $\log_b \sqrt{\dfrac{(x-4)(2x+7)}{x(3x+7)^2}}$

   g) $\log_y \dfrac{xz^7}{(y+1)^4}$

2. Escriba como un solo logaritmo

   a) $3\log_b x - \dfrac{1}{5}\log_b y$

   b) $\dfrac{4}{5}\log x - 3\log m + 5\log n - \log b$

   c) $-\log_b 3 - \log_b 4 + 4\log_b m + \log_b x + \log_b w$

   d) $\log(x+y) - \log(x-y)$

   e) $\log m + \log n - \dfrac{1}{3}\log a - 5\log b - \dfrac{1}{4}\log h$

   f) $\log_b m + \log_b p - \dfrac{1}{5}\log_b r$

   g) $\log_a n - \log_a q + 5\log_a r + \dfrac{1}{2}\log_a f$

3. Demostrar la siguiente igualdad usando las propiedades de los logaritmos

$$\log\frac{27}{28}+\log\sqrt{98}+\log\frac{\sqrt{8}}{9}=\log 3$$

4. Demostrar la siguiente igualdad usando las propiedades de los logaritmos

$$\frac{1}{4}\log\left(x^2+3x+2\right)+\frac{1}{4}\log\frac{x+1}{x+2}=\log\sqrt{x+1}$$

5. Hallar el valor de la siguiente expresión logarítmica:

$$\log 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

A) $\log 2$ B) $\frac{8}{15}\log 2$ C) $\frac{15}{8}\log 2$ D) $15\log 2$ E) Ninguno

6. El valor de la siguiente expresión:

$$3\log_{27}(3)\times\log_{27}(81)-\log_{\frac{1}{27}}(9)$$

es igual a:

A) -1 B) 3 C) 2 D) -3 E) Ninguno

7. Determinar el valor de:

$$E=\log_5\sqrt{125}+\log_{11}\sqrt[3]{121}+\frac{5}{6}$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Ninguno

8. Determinar el valor de la siguiente expresión:

$$E=2\log_b b+2\log_b\left(\frac{1}{b}\right)+\log_b 1$$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 1 E) Ninguno

9. Calcular el valor de

$$49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$$

Solución. Haciendo uso de que $49=7^2$ y de que al elevar una potencia a una potencia los exponentes se multiplican. Obtenemos:

$$7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25}$$

el exponente se puede transformar del modo siguiente:

$$2-\frac{1}{2}\log_7 25=2-\log_7 5=\log_7 49-\log_7 5=\log_7\frac{49}{5}$$

así, pues:

$$\begin{aligned} 7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25} &= 7^{\log_7 \frac{49}{5}} \\ &= \frac{49}{5} \end{aligned}$$

10. 182.Calcular: $\log_8 \log_4 \log_2 16$

11. 182. Calcular: $-\log_2 \log_3 \sqrt{\sqrt[4]{3}}$

12. 182. $\log \log \sqrt{\sqrt[6]{10}}$

13. 183. $\left(\frac{16}{25}\right)^{\log_{\frac{125}{64}} 3}$

14. 183. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\log_{\frac{81}{16}} 5}$

15. 184. $36^{\log_6 5} + 10^{1+\log 2} + 3^{\log_9 36}$

16. 186. $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

17. 187. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

18. Calculemos $\log 25$ si $\log 2 = a$.

    Solución. Tenemos $\log 25 = 2\log 5$. Expresemos el número 5 como una división $\frac{10}{2}$, esto es

$$\begin{aligned} 2\log 5 &= 2\log\frac{10}{2} \\ &= 2(\log 10 - \log 2) \\ &= 2(1-a) \end{aligned}$$

19. Calcular: $\log_3 18$ si $\log_3 12 = a$.

    Solución. Simplificando

$$\begin{aligned} \log_3 18 &= \log_3 3^2 \cdot 2 \\ &= 2 + \log_3 2 \end{aligned}$$

ahora debemos calcular $\log_3 2$, sabiendo que $\log_3 12 = a$. Expresemos el número 12 como el produce de $3 \cdot 2^2$, esto es

$$\begin{aligned} a &= \log_3 12 = \log_3 3 \cdot 2^2 \\ &= 1 + 2\log_3 2 \end{aligned}$$

despejando $\log_3 2 = \dfrac{a-1}{2}$, reemplazando

$$\begin{aligned}\log_3 18 &= 2 + \frac{a-1}{2} \\ &= \frac{a+3}{2}\end{aligned}$$

20. 188. $\log 1250$ si $\log 2 = 0{,}3010$

21. 189. $\log_{100} 40$ si $\log_2 5 = a$.

22. 190. $\log_6 16$ si $\log_{12} 27 = a$

23. 191. $\log_3 5$ si $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$

24. 192. $\log_{35} 28$ si $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

IDENTIDADES
Demostrar las identidades

1. 200. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.
2. 201a. $\log_{ab} n = \dfrac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n}$
3. 201b. $\dfrac{\log_a n}{\log_{ab} n} = 1 + \log_a b$
4. 201c. $\log_{bn} an = \dfrac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$

18.2.1. ECUACIONES LOGARITMICAS

Al resolver ecuaciones logarítmicas se utilizan dos métodos fundamentales: 1) paso de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ a la ecuación $f(x) = g(x)$; 2) introducción de nuevas variables. En ciertas ocaciones es preciso aplicar procedimientos artificiales.

Consideremos las ecuaciones logarítmicas de la forma

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \tag{18.11}$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

La resolución de semejantes ecuaciones se basa en el siguiente teorema:

Teorema 1. La ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es equivalente al sistema mixto:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0. \end{cases} \tag{18.12}$$

Es de notar que para resolver la ecuación (18.11) no es obligatorio resolver el sistema (18.12). Se puede operar de otro modo: resolver la ecuación

$$f(x) = g(x) \tag{18.13}$$

y de sus soluciones elegir aquellas que satisfacen el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \end{cases} \tag{18.14}$$

Al resolver las ecuaciones logarítmicas se hace uso de distintas propiedades de los logarítmos. Por ejemplo, estudiaremos la ecuación

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x) \tag{18.15}$$

Ella se transforma a la forma:

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a h(x) \tag{18.16}$$

Ejemplo 1. Resolvamos la ecuación

$$\log_3 \left(x^2 - 3x - 5\right) = \log_3 (7 - 2x)$$

Solución. De acuerdo al teorema 1. La ecuación es equivalente:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$$

después de resolver, obtenemos: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

Ejemplo 2. Resolvamos la ecuación

$$\log(x+4) + \log(2x+3) = \log(1-2x)$$

Solución. Transformaremos la ecuación a la forma

$$\log[(x+4)(2x+3)] = \log(1-2x)$$

De esta ecuación hallamos: $x_1 = -1$, $x_2 = -5,5$.

De aquí x_1 es solución en la ecuación $2x + 3 > 0$ y x_2 no satisface la desigualdad $1 - 2x > 0$.

Ejemplo 3. Resolvamos la ecuación

$$\log_2 \left(x^2 - 1\right) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$$

Solución. Ante todo, pasemos en la ecuación a los logarítmos con iguales bases. Como $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, la ecuación se transforma al aspecto

$$\log_2 \left(x^2 - 1\right) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} (x-1)^{-1}$$

A continuación, tenemos $\log_2 \left(x^2 - 1\right) = -\log_2 (x - 1)$,

$$\log_2 \left(x^2 - 1\right) = \log_2 \frac{1}{x-1}$$

Habiendo resuelto la ecuación, hallamos: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nos resta elegir entre los valores obtenidos aquellos que satisfacen el sistema de desigualdades $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$.

Resolviendo este sistema, hallamos que $x > 1$. De los valores obtenidos x_1, x_2, x_3 sólo $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisface la desigualdad $x > 1$. Así, pues, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la única raíz de la ecuación.

Ejemplo 4. Resolvamos la ecuación

$$\log_{x+4}\left(x^2 - 1\right) = \log_{x+4}(5 - x)$$

Solución. Según el teorema 2 esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x \\ x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Después de resolver la ecuación que entra en el sistema, obtenemos: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. De estos dos valores sólo $x = 2$ satisface todas las demás condiciones del sistema. Así, pues, $x = 2$ es la raíz de la ecuación.

Ejercicio 5. Resolvamos la ecuación

$$\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{\log \frac{x}{10}}.$$

Solución. Como $\log \dfrac{x}{10} = \log x - 1$, la ecuación dada puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{\log x - 1}$$

Haciendo $u = \log x$ obtenemos la ecuación

$$u^2 + u + 1 = \frac{7}{u - 1}$$

de donde hallamos que $u = 2$. De la ecuación $\log x = 2$ hallamos $x = 100$. Es fácil cerciorarse de que ésta es la única raíz de la ecuación inicial.

Ejemplo 6. Resolvamos la ecuación

$$\log^2 x^3 - \log\left(0,1x^{10}\right) = 0.$$

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} \left(\log x^3\right)^2 - \log x^{10} - \log 0,1 &= 0, \\ 9\log^2 x - 10\log|x| + 1 &= 0, \end{aligned}$$

y, a continuación,

$$9\log^2 x - 10\log x + 1 = 0$$

(en el caso dado $|x| = x$, ya que el campo de definición de la ecuación se prefija con la desigualdad $x > 0$).

Haciendo $u = \log x$ obtenemos la ecuación cuadrática $9u^2 - 10u + 1 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{9}$. Queda por resolver el conjunto de ecuaciones $\log x = 1$; $\log x = \frac{1}{9}$.

De la primera ecuación obtenemos $x_1 = 10$, de la segunda, $x_2 = \sqrt{10}$. Estos valores de x son también las soluciones de la ecuación propuesta.

Ejemplo 7. Resolvamos la ecuación

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^2 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0.$$

Solución. Pasando en todos los logarítmos a la base 2, obtenemos

$$\frac{\log 2x^2}{\log_2 0,5x} - \frac{14\log_2 x^3}{\log_2 16x} + \frac{40\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x} = 0$$

y, seguidamente,

$$\frac{2\log_2|x|}{\log_2 x - 1} - \frac{42\log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{20\log_2 x}{\log_2 x + 2} = 0.$$

De la ecuación dada se desprende que $x > 0$ y, por lo tanto, $|x| = 0$, es decir, $\log_2|x| = \log_2 x$. Haciendo $u = \log_2 x$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{2u}{u-1} - \frac{42u}{u+4} + \frac{20u}{u+2} = 0,$$

cuyas raíces son $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2$.

Ahora, el problema se reduce a resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\log_2 x = -\frac{1}{2};\ \log_2 x = 0;\ \log_2 x = 2.$$

De la primera ecuación hallamos $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de la segunda, $x_2 = 1$, de la tercera $x_3 = 4$.

Todos los valores hallados son las raíces de la ecuación inicial (cerciórense de ellos por su cuenta).

Ejemplo 8. Resolvamos la ecuación $\log(20 - x) = \log^3 x$.

Solución. Esta ecuación no puede ser resuelta con ninguno de los procedimientos estudiados en los anteriores problemas. Hallemos alguna de sus raíces según el método de selección. En nuestro caso, obtenemos $x_1 = 10$. Pero no podemos considerar que la ecuación ya está resuelta: es posible que ella tenga otras raíces. Demostremos que no las tiene. Está claro, que las raíces de la ecuación se deben buscar en el campo de su definición, es decir, en el intervalo $]0, 20[$. En éste, la función $y = \log(20 - x)$ decrece, mientras que la función $y = \log^3 x$, crece. Pero, entonces, si la ecuación tiene raíz, ésta será sólo una. Así pues, $x = 10$ es la única raíz de la ecuación dada.

18.2.2. ECUACIONES EXPONENCIALES - LOGARITMICAS

En este apartado vamos a estudiar ecuaciones que pueden ser consideradas tanto exponenciales como logarítmicas.

Ejemplo 9. Resolvamos la ecuación

$$x^{1-\log x} = 0,01.$$

Solución. El campo de definición de la ecuación es $x > 0$. En este campo, las expresiones que entran en ambos miembros de la ecuación, sólo toman valores positivos, por lo que al tomar los logaritmos decimales de dos miembros de la ecuación, obtenemos la ecuación

$$\log x^{1-\log x} = \log 0,01,$$

equivalente a la ecuación propuesta. A continuación, tenemos

$$(1-\log x)\log x = -2$$

Hagamos $u = \log x$, obtenemos la ecuación $(1-u)\,u = -2$, de donde $u_1 = -1$; $u_2 = 2$. Queda por resolver el siguiente conjunto de ecuaciones: $\log x = -1$; $\log x = 2$.

De este conjunto, obtenemos: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 100$.

Ejemplo 10. Resolvamos la ecuación

$$\log_x\left(3x^{\log_5 x} + 4\right) = 2\log_5 x$$

Solución. Haciendo uso de la definición del logaritmo, transformemos la ecuación a la forma:

$$x^{2\log_5 x} = 3x^{\log_5 x} + 4$$

Haciendo $u = x^{\log_5 x}$, obtenemos la ecuación $u^2 - 3u - 4 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = -1$, $u_2 = 4$.

Ahora, el problema se reduce a la resolución del siguiente conjunto de ecuaciones: $x^{\log_5 x} = -1$; $x^{\log_5 x} = 4$.

Como $x^{\log_5 x} > 0$ y $-1 < 0$, la primera ecuación del conjunto no tiene soluciones. Tomando los logaritmos por la base 5 de ambos miembros de la segunda ecuación del conjunto, obtenemos:

$$\log_5^2 x = \log_5 4$$

es decir

$$\log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4},$$

de donde hallamos $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$. Como es fácil cerciorarse, éstas son las raíces de la ecuación.

Ejemplo 11. Resolvamos la ecuación

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}} + 125\right) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}$$

Solución. Primero vamos a considerar esta ecuación como logarítmica. Como $1+\dfrac{1}{2x}=\log_5 5^{1+\dfrac{1}{2x}}$, escribimos la ecuación propuesta en la forma

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{5}}+125\right)=\log_5 6+\log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}$$

A continuación, tenemos

$$\begin{aligned}\log_5\left(5^{\dfrac{1}{x}}+125\right) &= \log_5\left(6\cdot 5\cdot 5^{\dfrac{1}{2x}}\right)\\ 5^{\frac{1}{x}}+125 &= 30\cdot 5^{\frac{1}{2x}}.\end{aligned}$$

Hemos obtenido una ecuación exponencial que puede ser resuelta según el método de introducción de una nueva variable. Haciendo $u=5^{\frac{1}{2x}}$, hallamos la ecuación $u^2-30u+125=0$, cuyas raíces son $u_1=5$, $u_2=25$.

Ahora, el problema se ha reducido a la resolución del conjunto de dos ecuaciones:

$$5^{\frac{1}{2x}}=5;\ 5^{\frac{1}{2x}}=25.$$

De la primera ecuación obtenemos $\dfrac{1}{2x}=1$, de donde $x_1=\dfrac{1}{2}$.

De la segunda ecuación nos proporciona $\dfrac{1}{2x}=2$, de donde $x_2=\dfrac{1}{4}$.

Así, pues, la ecuación propuesta tiene dos raíces: $x_1=\dfrac{1}{2}$ y $x_2=\dfrac{1}{4}$.

Resuelva las ecuaciones

1. Hallar la suma de todas las soluciones de la siguiente ecuación logarítmica:

   $$\log_2 x+\log_x 2=4-2\log_{x^2}4$$

   A) 10 B) 70 C) 40 D) 16 E) Ninguno

2. Resolver la siguiente ecuación logarítmica:

   $$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$$

   A) 4 B) 9 C) 16 D) 25 E) Ninguno

3. Determinar una solución de la siguiente ecuación logarítmica $\log_2^2 x-\log_2 x=2$

   A) $\dfrac{3}{2}$ B) 4 C) 3 D) $\dfrac{5}{2}$ E) Ninguno

4. Determinar el valor de x en la siguiente ecuación:

   $$\log_3\left(\log_5 2^{x^3}\right)=6+\log_3(\log_5 2)$$

5. Hallar el valor de x que satisface la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_2 \sqrt{x+1} + \log_2 \sqrt{x+2} = 1$$

A) 2 B) 5 C) 3 D) 4 E) Ninguno

6. Resolver la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_x \left(\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} \right) = \frac{1}{\log_3 x}$$

A) 5 B) 7 C) 10 D) 25 E) Ninguno

7. Si $\log_{(a+1)} (x+1) = 2$ y $\log_{(a+2)} (x+8) = 2;$ entonces $a + x$ vale

A) 3 B) 9 C) 10 D) 18 E) Ninguno

8. El valor de x en la ecuación:

$$\log_x \left(\log_x \left(2x^2 \right) \right) = \log_{\sqrt{x}} \left(\log_{2x^2} x \right)$$

es:

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) Ninguno

9. El valor de x en la ecuación:

$$\log_2 \left(\log x + 2\sqrt{\log x} + 1 \right) - 2\log_4 \left(\sqrt{\log x} + 1 \right) = 1$$

es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguno

10. El valor de x en la siguiente expresión logarítmica es:

$$\log_3 \log_5 2^{x^3} = 6 + \log_3 \log_5 2$$

A) 2 B) 6 C) 3 D) 9 E) Ninguno.

11. En la siguiente ecuación logarítmica, encontrar la solución positiva de x:

$$\log_{(x+3)} 6 - \frac{\log_{(3+x)} 4}{\log_{(4-x)} 4} = 1$$

A) 2 B) 4 C) 3 D) 6 E) Ninguno

12. Determinar el valor de $E = \log_{25} 125 + \log_{11} \sqrt[3]{121} + \frac{5}{6}$

A) 5 B) 4 C) 2 D) 3 E) Ninguno

Solución.

$$\begin{aligned}
E &= \log_{25} 125 + \log_{11} \sqrt[3]{121} + \frac{5}{6} \\
E &= \log_{5^2} 5^3 + \log_{11} \left(11^2\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{6} \\
E &= \frac{3}{2} \log_5 5 + \frac{2}{3} \log_{11} 11 + \frac{5}{6} \\
E &= \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9+4+5}{6} = 3//
\end{aligned}$$

13. En la siguiente ecuación:

$$\log(x+9) - \frac{1}{2}\log(3x-8) = 2 - 2\log 5$$

un valor de x es:

A) 10 B) 11 C) 12 D) 15 E) Ninguno

Solución.

$$\begin{aligned}
\log(x+9) - \frac{1}{2}\log(3x-8) &= 2 - 2\log 5 \\
\log(x+9) - \log\sqrt{3x-8} &= \log 10^2 - \log 5^2 \\
\log\frac{x+9}{\sqrt{3x-8}} &= \log\frac{100}{25}
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación $x + 9 = 4\sqrt{3x-8}$, cuyas soluciones son: 11 y 19.

14. Si $\log_{(a-1)}(x+1) = 1$ y $\log_{(x+2)}(x+8) = 2$ entonces $a + x$ vale:

A) 4 B) 9 C) 10 D) 18 E) Ninguno

Solución. De la primera ecuación

$$\begin{aligned}
a - 1 &= x + 1 \\
x - a + 2 &= 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &= x + 8 \\
x^2 + 3x - 4 &= 0 \\
(x+4)(x-1) &= 0
\end{aligned}$$

Entonces $x_1 = -4$ (no es solución) y $x_2 = 1$, reemplazando en (1) tenemos $a_2 = 3$, de donde $x_2 + a_2 = 4$.

15. La suma de las raíces de la ecuación: $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$ es:

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) Ninguno

Solución.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\log_2 x}\right)^2 &= \left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 \\ \log_2 x &= \left(\log_2 (x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \log_2 x^{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\log_2 x\right)^2\end{aligned}$$

Si $u = \log_2 x$, reemplazando $u = \frac{1}{4}u^2$, resolviendo $u\,(u-4) = 0$, $u_1 = 0$ y $u_2 = 2$ llevando a las ecuación original

$$\log_2 x = 0, \text{ si } x_1 = 1$$

y

$$\log_2 x = 4, \text{ si } x_2 = 16$$

La suma de las raíces es $x_1 + x_2 = 17$.

16. Dada la siguiente ecuación:

$$\log (2x-1)^n + \log (x-1)^{10^{\log n}} = n$$

Hallar x, sabiendo que n es cualquier entero positivo y log es el logaritmo en base 10.

A) 6 B) 3 C) 4 D) 2 E) $\frac{3}{2}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log (2x-1)^n + \log (x-1)^{10^{\log n}} &= n \qquad (1) \\ \log (2x-1)^n + \log (x-1)^n &= n \\ n\log (2x-1) + n\log (x-1) &= n \\ \log (2x-1)(x-1) &= 1\end{aligned}$$

por propiedad

$$\begin{aligned}(2x-1)(x-1) &= 10 \\ 2x^2 - 3x - 9 &= 0 \\ (2x+3)(x-3) &= 0\end{aligned}$$

cuyas raíces son: $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = 3$.

De (1) se deduce que n es un número positivo, entonces las expresiones:

$$\begin{aligned}2x - 1 &> 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \\ x - 1 &> 0 \rightarrow x > 1\end{aligned}$$

La solución es $x > 1$. Tomando en cuenta esta condición, la raíz x_1 se descarta, quedando como única raíz $x_2 = 3$.

17. Al resolver la ecuación

$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x \log_{1424} 712 + \log_{1424} 72$$

entonces podemos decir, que el número de soluciones es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4.

Solución. Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} x + \log_{1424}(1 + 2^x) &= x \log_{1424} 712 + \log_{1424} 72 \\ x + \log_{1424}(1 + 2^x) &= x \log_{1424} \frac{1424}{2} + \log_{1424} 72 \\ x + \log_{1424}(1 + 2^x) &= x \log_{1424} 1424 - x \log_{1424} 2 + \log_{1424} 72 \\ x + \log_{1424}(1 + 2^x) &= x - x \log_{1424} 2 + \log_{1424} 72 \\ \log_{1424}(1 + 2^x) &= \log_{1424} 72 - x \log_{1424} 2 \\ \log_{1424}(1 + 2^x) &= \log_{1424} \frac{72}{2^x} \\ 1 + 2^x &= \frac{72}{2^x} \end{aligned}$$

eliminando denominadores:

$$\begin{aligned} (2^x)^2 + 2^x - 72 &= 0 \\ (2^x - 8)(2^x + 9) &= 0 \end{aligned}$$

del factor $2^x - 8 = 0 \Rightarrow x = 3$ y del factor $(2^x + 9)$ no se puede obtener valores para x, pues esta expresión siempre es mayor que cero y por tanto no satisface la ecuación. Por lo tanto la ecuación tiene solo una solución.

18. Resolver la siguiente ecuación logarítmica: $\sqrt{\log \sqrt{x}} = 0,5$ cuyo resultado es:

A) 3.2316 B) 3.1263 C) 3.3621 D) 3.1623 E) Ninguno

19. Hallar el valor de x en la siguiente ecuación logarítmica:

$$\frac{1 + \log_2(x - 4)}{\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right)} = 1$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Ninguno

20. Resolver la siguiente expresión logarítmica:

$$2^{\log_7\left(x^2 - 7x + 21\right)} = 3^{\log_7 4}$$

A) 3 y 2 B) 3 y 4 C) 3 y 7 D) 4 y 7 E) Ninguno

21. Resolver la siguiente ecuación: $\log_3(4x + 5) = \log_3 x^2$ cuya suma de las soluciones es:

A) 4 B) 6 C) 9 D) -4 E) Ninguno

22. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log_5 [3 + 2\log_7 (8 - \log_4 x)] = 1$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Ninguno

23. Determine el valor de $E = \log_{25} 125 + \log_{11} \sqrt[3]{121} + \frac{5}{6}$.

A) 5 B) 4 C) 2 D) 3 E) Ninguno

24. En la siguiente ecuación: $\log(x+9) - \frac{1}{2}\log(3x-8) = 2 - 2\log 5$, un valor de x es:

A) 10 B) 11 C) 12 D) 15 E) Ninguno.

25. Si $\log_{(a-1)}(x+1)$ y $\log_{(x+2)}(x+8) = 2$ entonces $a + x$ vale:

A) 4 B) 9 C) 10 D) 18 E) Ninguno

26. La suma de las raíces de la ecuación: $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$ es:

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) Ninguno

27. Si $\log_2(\log_3(\log_{10} x)) = 1$, hallar $\log_x 10$.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 9 E) Ninguno

28. Hallar la mayor solución de la ecuación: $\log_5 x^{\log_3 \sqrt{5}} = 2\log_2 3^{\log_x 2}$

A) 9 B) 8 C) 10 D) 14 E) Ninguno

29. Si $x = \log_2 8$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 4$, calcular $\log_{3x}(x+y)$.

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Ninguno

30. Calcular la suma de las raíces de la ecuación: $\log_x 3 \log_{\frac{x}{81}} 3 = \log_{\frac{x}{729}} 3$.

A) 35 B) 36 C) 37 E) 38 E) Ninguno

31. Hallar el producto de los valores de x que satisface a la ecuación:

$$\log_3 x - 2\log_{x^2} 9 = 1$$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) Ninguno

32. La solución de la ecuación: $(\log_2 x)\left(\log_{\sqrt{x}} 8\right)\left(\log_{x^2+15} 2\right) = 1$ es:

A) 6 B) 1 C) 7 D) 5 E) Ninguno

33. La solución racional de la ecuación: $2\log_x 3 + 5 - \log_{\sqrt[3]{3}} x = 0$ es:

A) 10 B) 8 C) 9 D) 4 E) Ninguno

34. Resolver: $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{8}} x = 11$.

    A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{64}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{4}$ E) Ninguno

35. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

    A) 4 B) 16 C) 8 D) 12 E) Ninguno

36. Resolver la ecuación logarítmica:

$$\log_x \left(\frac{12 - \log_5 x}{\log_5 x}\right) = \frac{1}{\log_3 x}$$

    A) 125 B) 150 C) 165 D) 10 E) Ninguno

37. La suma de las soluciones del siguiente sistema es:

$$\begin{cases} \log_6 x + \log_6 y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

    A) 12 B) 8 C) 20 D) 4 E) Ninguno

38. La diferencia de las soluciones del sistema es:

$$\begin{cases} \log\left(x^2 + y^2\right) - 1 = \log 13 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = 3\log 2 \end{cases}$$

    A) 2 B) 4 C) 6 D) 1 E) Ninguno

39. $\log(x-3) + \log(x+3) = 2\log 4$. Sol. 5

40. $\log_2 x + \log_x 2 = 2(2 - \log_x 2)$. Sol. 8; 2

41. $\log_4\left(2x^2 + 15x + 26\right) = 3$. Sol. $-\frac{19}{2}$; 2

42. $\log_x 125 = \log_2 \sqrt{8}$. Sol. 25

43. $\log_x x^2 + \log_{x^2} x^{x^2} = 4$. Sol. 2

44. $\log_3 n \cdot \log_n 2n \cdot \log_{2n} x = \log_n n^2$. Sol. 9

45. $2\log_3 x + 3\log_{27} x = 15$. Sol. 243

46. $\log(2x-1)^n + \log(x-1)^{10^{\log n}} = \not{n}$. Sol. 3

736. $\log_4 \frac{2}{x-1} = \log_4(4 - x)$.
737. $\log_3((x-1)(2x-1)) = 0$.
738. $\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 4x + 3}{4} = -2$.

739. $\log(x+1,5) = -\log x$.
740. $\log(4,5-x) = \log 4,5 - \log x$.
741. $\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18$.
742. $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$.
743. $\log\left(x^3+27\right) - 0,5\log\left(x^2+6x+9\right) = 3\log\sqrt[3]{7}$.
744. $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20)$.
745. $\log_5(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_3 8$.
746. $\dfrac{1-\log x}{x} = \dfrac{\log^2 14 - \log^2 4}{\log 3,5^x}$.
747. $\log_2(x+1)^2 + \log_2\sqrt{x^2+2x+1} = 6$.
748. $\dfrac{\log\left(35-x^3\right)}{\log(5-x)} = 3$.
749. $\dfrac{\log 2 + \log\left(4-5x-6x^2\right)}{\log\sqrt[3]{2x-1}} = 3$.
750. $\log_{\frac{1}{5}}\log_5\sqrt{5x} = 0$.
751. $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3} = 0$.
752. $\log_4\log_2\log_3(2x-1) = \dfrac{1}{2}$.
753. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x} + 3\log_{\frac{1}{4}}(1-x) = \log_{\frac{1}{16}}\left(1-x^2\right)^2 + 2$.
754. $(1-\log 2)\log_5 x = \log 3 - \log(x-2)$.
755. $\log_{x^2}(x+2) = 1$.
756. $\log_{x-2}(2x-9) = \log_{x-2}(23-6x)$.
757. $\log_{5x-2} 2 + 2\log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x+1)$.
758. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$.
759. $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x = x+4$.
760. $1 + \log_x\dfrac{4-x}{10} = \left(\log x^2 - 1\right)\log_x 10$.
761. $1 + 2\log_x 2\cdot\log_4(10-x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$.
762. $\log_{x+\frac{1}{8}} 2 = \log_x 4$.
763. $\log_3\left(-x^2-8x-14\right)\log_{x^2+4x+4} 9 = 1$.
764. $0,1\log^4 x - \log^2 x + 0,9 = 0$.
765. $\dfrac{1}{5-4\log(x+1)} + \dfrac{5}{1+4\log(x+1)} = 2$.
766. $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$.
767. $\log^2(100x) + \log^2(10x) = 14\log x + 15$.
768. $\dfrac{1-\log^2 x}{\log x - 2\log^2 x} = \log x^4 + 5$.
769. $\log_x 5\sqrt{5} - \dfrac{5}{4} = \log^2 x\sqrt{5}$.
770. $\log(\log x) + \log\left(\log x^3 - 2\right) = 0$.
771. $\log_x 2 + \log_x x = 2,5$.

772. $\log^2_{\frac{1}{2}} 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8.$
773. $\log\left(x^2 - 8\right) \cdot \log(2 - x) = \dfrac{\log_5\left(x^2 - 8\right)}{\log_5(2 - x)}.$
774. $\log_2 \log_3\left(x^2 - 16\right) - \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x^2 - 16} = 2.$
775. $3\log_{16}\left(\sqrt{x^2 + 1} + 1\right) + \log_2\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \log_{16}(4x + 1) - 0,5.$
776. $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0.$
777. $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \log_{x - \frac{1}{2}}(x + 1).$
778. $\log_{3x+7}(5x + 3) + \log_{5x+3}(3x + 7) = 2.$
779. $(0,4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3}.$
780. $(1,25)^{1 - \log_2^2 x} = (0,64)^{2\log_2 2x}.$
781. $x^{\log x} = 1000x^2.$
782. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10.$
783. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4.$
784. $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{10x+1}.$
785. $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x - 1} = 5.$
786. $x^{\log_3 x + 1} = 9x.$
787. $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_{x^2}\left(x^2 - 1\right)} = 5.$
788. $\log_x\left(2x^{x-2} - 1\right) + 4 = 2x.$
789. $15^{\log_5 3} x^{\log_5 9x + 1} = 1.$
790. $16^{\log_4 2} = 8x.$
791. $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} - \dfrac{1}{x} = 0.$
792. $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}.$
793. $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5.$

18.2.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARITMICAS

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar un valor de la variable x de la solución del siguiente sistema de ecuación:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

A) 35 B) 45 C) 25 D) 15 E) Ninguno

2. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^n y^m = 10^n \\ x^m y^n = 10^m \end{cases}$$

A) 10; 1

3. Resolver:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y^2 = x^3 \end{cases}$$

A) $\left(\frac{9}{4}; \frac{27}{8}\right)$

4. Resolver:

$$\begin{cases} 2\log_3 x + 2\log_3 y = 0 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

A) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$

5. Resolver:

$$\begin{cases} \log_{0,25} x - \log_{0,5} y = 1 \\ x - y = -0{,}75 \end{cases}$$

A) $(0{,}25; 1)$ y $(2{,}25; 3)$

6. Calcular $x + y$ al resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^3 = 96 \\ \log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4 \end{cases}$$

A) 10

7. Calcular x del sistema:

$$\begin{cases} \log_9\left(x^2 + 2\right) + \log_{81}\left(y^2 + 9\right) = 2 \\ 2\log_4(x + y) - \log_2(x - y) = 0 \end{cases}$$

A) 5

8. Calcular el valor de $x + y$, del sistema de ecuaciones exponenciales

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^{2y-1} = x\sqrt{2} \\ 2y + y^{y^x} = 1 \end{cases}$$

A) $\frac{3}{4}$ B) 58 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{10}$ E) Ninguno

9. Resolver:

$$2^x + 2^y = 12 \qquad (1)$$
$$x + y = 5 \qquad (2)$$

Solución. De (2) $x = 5 - y$, reemplazando en (1):

$$\begin{aligned} 2^{5-y} + 2^y &= 12 \\ \frac{32}{2^y} + 2^y &= 12 \\ 2^{2y} - 12 \cdot 2^y + 32 &= 0 \\ (2^y - 8)(2^y - 4) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $y_1 = 3$ y $y_2 = 2$, reemplazando en:

$$x = 5 - y$$

se tiene $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

10. Del sistema:

$$\begin{aligned} 3^{x+1} - 2^y &= 11 \\ 3^x + 2^{y+1} &= 41 \end{aligned}$$

Hallar $\log_y x$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 4.

Solución. (1) en (2)

$$\begin{aligned} 3^x + 2\left(3^{x+1} - 11\right) &= 41 \\ 3^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^x &= 63 \\ 3^x &= 3^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

reemplazando en (1):

$$\begin{aligned} 2^y &= 3^{2+1} - 11 \\ 2^y &= 2^4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Finalmente: $\log_y x = \log_4 2 = \frac{1}{2}$//

11. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 & (1) \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Solución. De (1): $2^{12x} + 2^{12y} = 12$ (3) y en (2) elevando al cuadrado ambos miembros:

$$2^{12x+12y} = 2^5 \Rightarrow 12x + 12y = 5 \Rightarrow x = \frac{5 - 12y}{12} \qquad (4)$$

(4) en (3):

$$\begin{aligned} 2^{12\left(\frac{5-12y}{12}\right)}+2^{12y} &= 12 \\ 2^{5-12y}+2^{12y} &= 12 \\ 2^5\cdot 2^{-12y}+2^{12y} &= 12 \qquad \left(*2^{12y}\right) \\ 2^{24y}-12\cdot 2^{12y}+32 &= 0 \\ \left(2^{12y}-8\right)\left(2^{12y}-4\right) &= 0 \end{aligned}$$

del primer factor $2^{12y}=2^3 \Rightarrow y_1=\dfrac{1}{4}$ y del segundo factor $2^{12y}=2^2 \Rightarrow$ $y_2=\dfrac{1}{6}$. Reemplazando en (4): $x_1=\dfrac{5-12\left(\dfrac{1}{4}\right)}{12}=\dfrac{1}{6}$ y $x_2=\dfrac{1}{4}$. Las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}\right)$.

12. $\begin{cases} 2\log_3 x+5\log_3 y=33 \\ \log_3 x+\log_3 y=9 \end{cases}$

 Sol. $(81;243)$

13. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log x+\dfrac{1}{2}\log y-\log\left(4-\sqrt{x}\right)=0 \\ \left(25^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{y}}-125\times 5^{\sqrt{y}}=0 \end{cases}$

 Sol. $(1;9)$, $(4;1)$

14. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2 \\ x^2+y=12 \end{cases}$, e indicar el valor de $\log_{(2x-y)}(3x-2y)$. Sol. 1

15. $\begin{cases} (x-y)\log_a(3x+y)=a^{\log_a 9} \\ \dfrac{1}{x-y}\log_b 324=\log_b\left(18x^2+12xy+2y^2\right) \end{cases}$

 Sol. $\left(\dfrac{5}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{9}{4}\right)$

16. $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}}=\sqrt[x]{128} \\ \log(x+y)=\log 40-\log(x-y) \end{cases}$

 Sol. $(7;3)$

17. Resolver: $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0 & (1) \\ x^2-5y^2+4=0 & (2) \end{cases}$

 Solución. Aplicando definición de logaritmos en (1): $\dfrac{1}{2}\log_2 x-\log_2 y=0$, resulta $\log_2\dfrac{\sqrt{x}}{y}=0$ de donde $y=\sqrt{x}$.

Reemplazando en (2):

$$\begin{aligned} x^2-5x+4 &= 0 \\ (x-4)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x_1=4$ y $x_2=1$, entonces $y_1=2$, $y_2=1$

18. $\begin{cases} \log(\log_3(\log_2 x))=0 \\ \log_3\left(x^2+2x+1\right)=y \end{cases}$. Calcular $x+y$

Solución. Resolviendo (1)

$$\begin{aligned} \log_3(\log_2 x) &= 1 \\ \log_2 x &= 3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Reemplazando en (2)

$$\begin{aligned} \log_3(81) &= y \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Entonces $x+y=12$

19. $\begin{cases} \log_a x+\log_{a^2} y=\dfrac{3}{2} \\ \log_{b^2} x-\log_{b^2} y=1 \end{cases}$

Sol. $\left(a\sqrt[3]{b^2};\dfrac{a}{b\sqrt[3]{b}}\right)$

Solución. Aplicando propiedad de logaritmos en (1) $\log_a x+\log_a\sqrt{y}=\dfrac{3}{2}$, entonces $\log_a\left(x\sqrt{y}\right)=\dfrac{3}{2}$, resulta $x\sqrt{y}=a^{\frac{3}{2}}$.

En (2) $\log_{b^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)=1$, entonces $x=yb^2$. Finalmente

$$y^{\frac{3}{2}}=\frac{a\sqrt{a}}{b^2}\Rightarrow y=\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y=\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$$

donde $x=ab^{-\frac{1}{3}}b^2\Rightarrow x=ab\sqrt[3]{b^2}$

20. $\begin{cases} \ln\left(x^2+y^2\right)-\ln 10=\ln 13 \\ \ln(x+y)-\ln(x-y)=3\ln 2 \end{cases}$

Sol. $(9;7)$

21. La suma de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

es

A) $\frac{51}{8}$ B) $\frac{49}{8}$ C) $\frac{47}{8}$ D) $\frac{45}{8}$ E) Ninguno

22. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ xy\left(\log_c d\right)\left(\log_d c\right) = 3^{\log_3 27} \end{cases}$

Sol. $(3;9)$, $(9;3)$

23. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ 4^{\log_4 x^2} - 2^{\log_2 y} = 5^{\log_5 20} \end{cases}$

Sol. $(5;5)$, $(-4;-4)$

24. $\begin{cases} \log_3(x+y) = 3\log_{27}\left(19+\sqrt{xy}\right) \\ 2\log_5(x+y) = 2\log_{25}(931+xy) \end{cases}$

Sol. $(25;9)$, $(9;25)$

25. $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = \left(\sqrt{12}\right)^{-1} \\ (x+y)\times 2^{y-x} = 48 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} (x+y) = \left(2^2\cdot 3\right)^{\frac{y-x}{2}} \\ (x+y) = 2^{x-y}\cdot 2^4\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{y-x}\cdot 3^{\frac{y-x}{2}} = 2^{x-y+4}\cdot 3 \end{cases}$$

$$y - x = 2$$

Reemplazando en (2):

$$\begin{aligned} (x+2+x)\cdot 2^2 &= 48 \\ 2x+2 &= 12 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

reemplazando en (3): $y = 7$

26. $\begin{cases} \log_9\left(x^2+2\right) + \log_{81}\left(y^2+9\right) = 2 \\ 2\log_4(x+y) - \log_2(x-y) = 0 \end{cases}$

Sol. $(5;0)$

27. $\begin{cases} x^m y^n = 10^m \\ x^n y^m = 10^n \end{cases}$

$$\begin{aligned} x^{mn} y^{n^2} &= 10^{mn} \\ x^{mn} y^{m^2} &= 10^{mn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{mn} y^{n^2} &= x^{mn} y^{m^2} \\ y^{n^2} &= y^{m^2} \\ y^{n^2-m^2} &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

reemplazando en cualquiera de las ecuaciones originales: $x = 10$

28. $\begin{cases} \sqrt[5]{\sqrt{3^x}} \times \sqrt[10]{3^y} = \sqrt[x]{2187} \\ \log(x-y) + \log(x+y) = \log 800 - \log 20 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{10}} 3^{\frac{y}{10}} = 3^{\frac{7}{y}} \\ \log(x-y)(x+y) = \log \dfrac{800}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{\frac{x+y}{10}} = 3^{\frac{7}{x}} \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

29. $\dfrac{2187}{3} = \dfrac{729}{3} = \dfrac{243}{3} = \dfrac{81}{3} = 27$

Sol. $(\pm 7; \pm 3)$

30. $70^2 = 4900$

31. $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \dfrac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases}$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^y} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^y}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} &= \frac{65}{36} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2y} &= \frac{65}{36}\left(\frac{3}{2}\right)^{x+y} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{y} &= \frac{4\cdot 65}{9\cdot 36}\left(\frac{3}{2}\right)^{x+y} \\
\frac{3^x2^y - 2^x3^y}{2^x2^y} &= \frac{4\cdot 65}{9\cdot 36}\frac{3^x3^y}{2^x2^y} \\
3^x2^y - 2^x3^y &= \frac{65}{9\cdot 9}\frac{3^x3^y}{2^x2^y}2^x2^y \\
3^x2^y - 2^x3^y &= \frac{65}{81}3^x3^y \\
\frac{2^y}{3^y} - \frac{2^x}{3^x} &= \frac{65}{81}
\end{aligned}$$

: luego

$$\log_{\frac{3}{2}} u \log_{\frac{3}{2}} v - \log_{\frac{3}{2}} u + \log_{\frac{3}{2}} v = 118$$

32. Al resolver el sistema: $\begin{cases} xz = 6 & (1) \\ (x+y)^x = 1000 & (2) \\ (x+y)^z = 100 & (3) \end{cases}$. El valor para y es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Solución. De (2)

$$x\log(x+y) = 3 \qquad (4)$$

De (3)

$$z\log(x+y) = 2 \qquad (5)$$

luego de (4) y (5)

$$\frac{x}{z} = \frac{3}{2}$$

Reemplazando en (1)

$$\left(\frac{3}{2}z\right)z = 6 \rightarrow z = 2$$

y $x = 3$, reemplazando x y z en (3):

$$\begin{aligned}
(3+y)^2 &= 100 \\
y &= 7
\end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2y = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{x}} = x^4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \dfrac{8}{3} \\ xy = 16 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \log\left(x^2 + y^2\right) - 1 = \log 13 \\ \log(x+y) - \log(x-y) = 3\log 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5\left(\log_y x + \log_x y\right) = 26 \\ xy = 64 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ \log(x-y)^2 = 2\log 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 10^{2-\log(x-y)} = 25 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 1 + 2\log 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - \left(\sqrt[4]{2}\right)^{x-y} = 12 \\ 3^{\log(2y-x)} = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3\left(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y\right) = 10 \\ xy = 81 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \log_{0,5}(y-x) + \log_2 \dfrac{1}{y} = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

18. $\begin{cases} (x+y)\, 3^{y-x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_3(x+y) = x - y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^x = y^y \end{cases} \quad (x > 0, y > 0)$

20. Resolver el siguiente sistema e indicar cuánto es el producto de las variables x e y

$$\begin{cases} \log(x-y) + \log(x+y) = \log 27 \\ e^x e^y = e^9 \end{cases}$$

A) 18 B) 21 C) 12 D) 24 E) Ninguno

18.3. INECUACIONES

1. Se tiene un total de 245 bolivianos en monedas de 1 boliviano y de 50 centavos. Si el total de monedas es 300, entonces el número m de monedas de 1 boliviano verifica:

   A) $m < 180$ B) $m > 200$ C) $180 < m < 200$ D) $100 < m < 150$ E) Ninguno

2. Una de las soluciones de la inecuación $\dfrac{15}{x} < x - 2$ es:

   A) $(-\infty; 8)$ B) $(-\infty; -8)$ C) $(-3; 0)$ D) $(-3, 3)$ E) Ninguno

3. Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1}$$

   A) $(-1, 0)$ B) $(0, 1)$ C) $(-1, 2)$ D) $(-1, 1)$ E) Ninguno

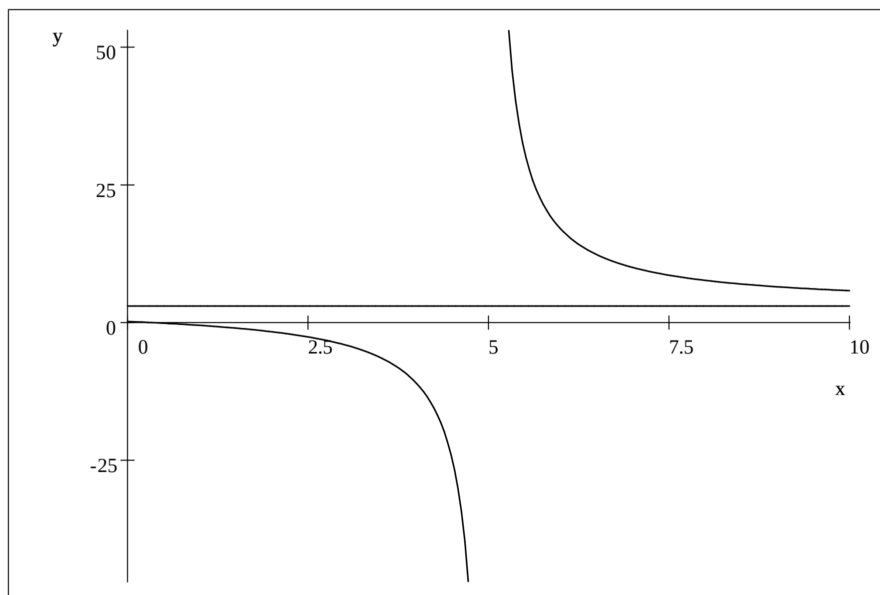
4. La inecuación $3 < \dfrac{3x-1}{x-5}$ tiene por solución:

   A) $x > 5$ B) $5 < x < 12$ C) $5 < x < 7$ D) $5 < x < 19$ E) Ninguno.

   Solución. Ordenando la inecuación

$$\frac{3x-1}{x-5} > 3$$

   La gráfica de la inecuación es:



como podemos observar, la asíntota $x = 5$, hacia la izquierda es negativo por lo tanto no es solución $x < 5$, pero hacia la derecha es positivo, por lo tanto la solución es

$$\boxed{x > 5}$$

5. Hallar el límite de x en la inecuación sigiente:

$$\frac{5}{3x+1} - \frac{20}{9x^2-1} < \frac{2}{3x-1}$$

A) $x < 2$ B) $x < 4$ C) $x < 5$ D) $x < 3$ E) Ninguno

6. La solución de la sigiente inecuación:

$$\frac{x+5}{x-6} \leq \frac{x-1}{x-3}$$

es:

A) $\left]-\infty; \frac{7}{3}\right] \cup]3;6[$ B) $]-\infty;3[$ C) $\left[\frac{7}{3}, 6\right[$ D) $]6;+\infty[$ E) Ninguno

7. Resolver la sigiente desigualdad

$$\sqrt[5]{3^{\frac{5x+13}{2}}} > \sqrt[7]{27^{\frac{8x+1}{4}}}$$

A) $]-\infty;3{,}34[$ B) $]3{,}34;\infty[$ C) $]-33{,}4;\infty[$ D) $]-\infty;33{,}4[$ E) Ninguno

8. Si $a < b$, resolver $\dfrac{ax+b}{2} + b < \dfrac{bx+a}{2} + a$. El intervalo de valores de x es:

   A) $]-\infty; 3[$ B) $]-3; +\infty[$ C) $[3; +\infty[$ D) $]-\infty; -3[$ E) Ninguno

9. El intervalo de solución común de las dos inecuaciones siguientes: $\dfrac{x+2}{x+8} > \dfrac{x-2}{x+3}$ y $\dfrac{x-1}{x+4} < \dfrac{x-5}{x-1}$.

   A) $21 < x < 22$ B) $-21 < x < 22$ C) $21 < x < -22$ D) $-21 < x < -22$ E) Ninguno

10. Se da el sistema

$$3 < \frac{3x-1}{x-5} < 5$$

   los valores que satisfacen son:

   A) $x > 5$ B) $x > 9$ C) $x > 12$ D) $x > 15$ E) Ninguno

11. Se da la inecuación: $\left|2x^2 - 3\right| < 4x + 3$, la suma de todos los enteros y positivos que la verifican es:

   A) 2 B) 3 C) 6 D) 10 E) Ninguno

12. Una de las soluciones de la desigualdad $2x^2 - 9 > 3x$ es:

   A) $(-10; -1)$ B) $\left(-\dfrac{3}{2}; 3\right)$ C) $(-5; 5)$ D) $(3, +\infty)$ E) Ninguno

Capítulo 19

VALOR ABSOLUTO

Al resolver ecuaciones que contienen una variable bajo el signo del módulo o valor absoluto, se utilizan con mayor frecuencia los siguientes métodos: 1) supresión del módulo por definición; 2) elevación de ambos miembros de la ecuación al cuadrado; 3) método de partición en intervalos.

1. Resolvamos la ecuación:

$$|2x-3|=5$$

Solución. Primer procedimiento. Como por definición:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x)\geq 0, \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x)<0, \end{cases}$$

la ecuación es equivalente al siguiente conjunto de dos sistemas mixtos:

$$\begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ 2x-3=5 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2x-3<0 \\ -(2x-3)=5 \end{cases}$$

Del primer sistema de este conjunto hallamos $x_1=4$, del segundo $x_2=-1$.

Segundo procedimiento. Como ambos miembros de la ecuación no son negativos, ella es equivalente a la siguiente: $|2x-3|^2=25$. Pero, $|f(x)|^2=(f(x))^2$. Por ello, la ecuación es equivalente a la ecuación $(2x-3)^2=25$. de donde obtenemos: $x_1=4$ y $x_2=-1$.

2. Resolvamos la ecuación:

$$|2x-3|=x+1$$

Solución. Como la anterior, esta ecuación puede ser resuelta de dos procedimientos. Al resolverla según el primer procedimiento obtenemos el siguiente conjunto de sistemas mistos, equivalentes a la ecuación

$$\begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ 2x-3=x+1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2x-3<0 \\ -(2x-3)=x+1 \end{cases}$$

de donde hallamos $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Al resolver la ecuación de acuerdo con el segundo procedimiento hay que tener en cuenta que la expresión $x + 1$ en el segundo miembro, según el sentido de la ecuación, debe ser positiva: $x+1 \geq 0$. Debido a esta condición la elevación al cuadrado de ambos miembros de la ecuación conducirá a otra ecuación equivalente a la inicial. O sea, la ecuación es equivalente al sistema mixto:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ (2x-3)^2 = (x+1)^2 \end{cases}$$

que, al resolverlo, nos proporciona: $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

3. Resolvamos la ecuación:

$$|2x - 3| = |x + 7|$$

Solución. Es fácil cerciorarse de que el procedimiento *elevación al cuadrado* (segundo procedimiento) es aquí el más conveniente. En efecto, al aplicar dicho procedimiento, obtenemos una ecuación equivalente, esto es:

$$(2x-3)^2 = (x+7)^2$$

de donde $x_1 = 10$, $x_2 = -\dfrac{4}{3}$.

4. Resolvamos la ecuación:

$$|3 - x| - |x + 2| = 5$$

Solución. En este caso es preferible el método de *partición en intervalos* (tercer procedimiento).

Marquemos en la recta numérica el valor de x con el que $3 - x = 0$ y el valor de x con el que $x + 2 = 0$. Con ello, la recta numérica se dividirá en los intervalos $]-\infty; -2[$, $[-2; 3]$, $]3; +\infty[$. Resolvamos la ecuación en cada uno de los indicados intervalos, es decir, el conjunto de sistemas mixtos, equivalente:

$$\begin{cases} -\infty < x < -2 \\ 3 - x + x + 2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ 3 - x - x - 2 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3 < x < \infty \\ -3 + x - x - 2 = 5 \end{cases}$$

o bien:

$$\begin{cases} x < -2 \\ 5 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x = -2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x > 3 \\ -5 = 5 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de este conjunto es el rayo $]-\infty; -2[$, del segundo sistema hallamos que $x = -2$, y el tercero, no tiene solución. Unificando las soluciones de estos tres sistemas obtenemos la solución de la ecuación: $]-\infty; -2[$.

5. Resolvamos la ecuación:

$$|x-2|+|x-1|=x-3$$

Solución. A primera vista puede parecer que su más conveniente resolución se llevaría a cabo según el método de *partición en intervalos*. Pero, de la ecuación está claro que $x-3>0$, o sea, $x>3$ y, entonces, asimismo, $x-2>0$ y $x-1>0$. Así, pues, la ecuación es equivalente al sistema mixto:

$$\begin{cases} x-2+x-1=x-3 \\ x>3 \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} x=0 \\ x>3 \end{cases}$$

que no tiene soluciones. De modo que la ecuación no tiene raíces.

6. 384. $|x|+x^3=0$
7. 385. $(x-1)(|x|-1)=-0{,}5$
8. 386. $\dfrac{4x-8}{|x-2|}=x.$
9. 387. $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|3x-5|}{2}.$
10. 388. $7-4x=|4x-7|$
11. 389. $|3x-5|=5-3x$
12. 390. $\left|x^2+x-1\right|=2x-1$
13. 391. $\left|2x-x^2+3\right|=2.$
14. 392. $\left|x^2+x-1\right|=2x-1$
15. 393. $\left|x^2-x-3\right|=-x-1$
16. 394. $2\left|x^2+2x-5\right|=x-1$
17. 395. $x^2+3|x|+2=0.$
18. 396. $(x+1)^2-2|x+1|+1=0.$
19. 397. $x^2+2x-3|x+1|+3=0.$
20. 398. $|x|+|x+1|=1.$
21. 399. $|x+1|+|x+2|=2.$
22. 400. $|x-1|-|x-2|=1.$

23. 401. $|x-2|+|4-x|=3.$
24. 402. $|x-1|+|x-2|=1.$
25. 403. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$
26. 404. $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$
27. 405. $|x-1|+|1+2x|=2\,|x|.$
28. 406. $|x|-2\,|x+1|+3\,|x+2|=0.$
29. 407. $|x+1|-|x|+3\,|x-1|-2\,|x-2|=|x+2|$
30. 408. $|x|-2\,|x+1|+3\,|x+2|=0.$
31. 409. $|x|+2\,|x+1|-3\,|x-3|=0.$
32. 410. $\left|x^2-9\right|+|x-2|=5.$
33. 411. $\left|x^2-1\right|+x+1=0.$
34. 412. $\left|x^2-4\right|-\left|9-x^2\right|=5.$
35. 413. $\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right|=5.$
36. 414. $\left|x-x^2-1\right|=\left|2x-3-x^2\right|.$
37. 415. $\left|x^2+2x\right|-|2-x|=\left|x^2-x\right|.$
38. 416. $||3-2x|-1|=2\,|x|.$
39. 417. $\dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+|x-5|}=1$

19.1. SERIES

1. Un muchacho gana un boliviano el primer día, dos bolivinos el segundo, cuatro el tercer dí, ocho el cuarto y así sucesivamente. Determinar cuántos bolivianos ganará en total en 12 días.

   A) $2^{12}-1$ B) $2^{12}-2$ C) $2^{12}-3$ D) $2^{12}-4$ E) Ninguno

2. Considere la siguiente serie: $5,\cdots,28,\cdots,73$. Inercalando una cierta cantidad de números entre 5 y 28, y el doble de esa cantidad entre 28 y 73, calcular la suma desde 5 hasta 73 inclusive.

   A) 279 B) 269 C) 309 D) 369 E) Ninguno

Capítulo 20

INTERES

1. Un cierto capital fue depositado en una financiera a interés compuesto y se obsrva que si se hubiese dejado dos años menos al capital definitivo, habría resultado inferior a 4000000, si por el contrario se le hubiese dejado 2 años más, el capital habría aumentado en 432640. Determinar la tasa de interés.

   A) 2 % B) 3 % C) 4 % D) 5 % E) Ninguno

20.1. ESTADISTICA

1. Tres números enteror m, n y p tienen una media aritmética de 10 y una edia de $\sqrt[3]{960}$. Halle aproximadamente la media armónica de estos números, si $np = 120$.

   Solución. El promedio es un valor representativo de un conjunto de datos, dependiendo de la forma de cálculo tenemos: Media aritmética

   $$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

   Media geométrica

   $$MG = \sqrt[n]{\prod x_i}$$